目　录

第一章 引 言

§1.1 基本内容

1. 欧几里德几何

直到大约公元前600年，几何主要是由一些求面积和求体积的法则组成的．这些法则连同一些关于三角形，圆，…的事实是由巴比伦人和埃及人仅仅基于实验和观察之上而发展起来的．从公元前600年到公元前300年，大体上是古希腊文化兴起和衰落的时期．这种文化，由于强调演绎推理和知识自成体系，完全改变了数学的性质，特别是改变了几何的作用．首先，数学被抽象化了．例如，对埃及人来说，直线是一条拉紧的细绳，而在希腊人的词汇中，点、直线、三角形、圆…变成了由适当的物体诱发出来的理性概念．其次，希腊人用几何术语来解释算术和代数．例如，一个数是一条线段的长度，两个数的乘积是一个矩形的面积，三个数的乘积是一个体积(甚至今天我们还说9是3的平方，8是2的立方)，几何作图被用来解方程．希腊人使数学抽象化，对于当代文明的贡献是无法估量的．然而必须指出，他们把算术和代数转换为几何的做法是不可取的．

现在我们来回顾一下居住在埃及的亚历山大里亚大学数学教授欧几里德的工作，他在选择了10条公理后(还使用了其它没有明确阐述的假设)，就能在他的《几何原本》中推出古希腊时期所有的重要结果．欧几里德所包括进去的许多材料对我们来说是相当熟悉的，因为中学平面几何和立体几何只是在它的基础上作了无关紧要的修改，我们只要回忆少数几个定理就能认识到这种几何的全部基础是度量概念——线段的长度，角的度量，…它是一种可测量的几何，但是显而易见，它并不总是可观察的几何．

当欧几里德认识到被包括进去的那些定理是不同学派——泰勒斯建立的奥尼亚学派，意大利南部的毕达哥拉斯学派和柏拉图在雅典建立的学派——以及一些个人的成就、而各自使用的是他们自己喜欢的公理时，他为自己提出任务的重要性就变得明显了．那时的首要任务是选择适当的、能被普遍接受的合理体系．上面已经提到，欧几里德没有明确阐述他的所有假设，其中包括：

通过$\triangle ABC$的顶点A和一内点P的直线也通过线段BC上的一点D.

在由点P和直线p所确定的平面上，至少有一条直线通过P且平行于p.

省略第一个假设，大概是由于它太明显而不值得提起．第二个假设被省略解释起来却不那么简单，实际上，它表现出当时希腊思想的特色．因为虽然欧几里德在他的第二条公理中假定线段可以朝两个方向任意延长，但是，在他处理手中的问题时，总是谨慎地只把线段延长到问题所需要的长度．为了和避开无限的希腊哲学思想保持一致，欧几里德把他的注意力集中于线段而避免考虑整条直线．因此，他提出第五公设：

如果一条直线p与两条直线r和s相交，而且p的某一侧的同旁内角和小于两个直角，

那么直线 r 和 s 在 p 的那一侧相交.

连同其它公理和默认的假设,就意味着承认著名的

平行公理:通过给定直线 p 外的任意一点 P, 在由 P 和 p 所确定的平面上有且仅有一条直线和 p 平行.

在以后的两千年中,这条公理一直困扰着几何学家. 在这期间,试图证明这条公理可由其它公理推出或者能用一条较简单的公理来代替,他们付出了无数的劳动. 直到18世纪中叶,数学家们才开始猜想可能存在其它的几何学. 在这种几何学里,平行公理不成立. 这个问题直到上世纪初才最后解决, 鲍耶和罗巴切夫斯基各自独立的创立了一种自身相容的几何学.这种几何学的实质是平行公理中的"有且只有一条直线"被代之以"有不只一条直线". 几年后,黎曼创立了另一种几何学,其中,"有且仅有一条直线"被代之以"没有直线",这些就是所谓的非欧度量几何学.

今天我们认识到有许多种几何学,特别是有一种非度量几何学,平行公理在其中不起作用. 下面是这种几何学的一个典型定理(见图 1-1):

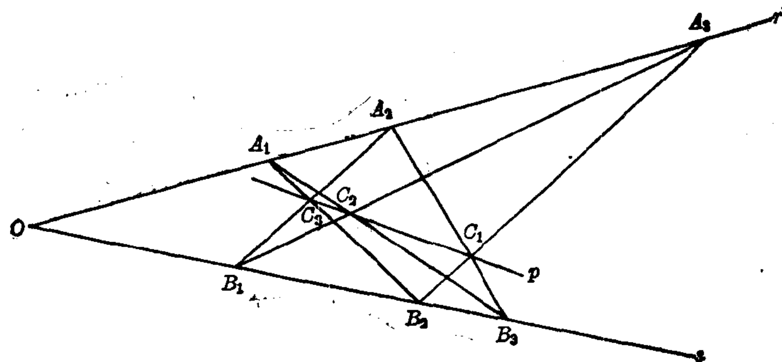


图 1-1

如果 A_1, A_2, A_3 是直线 r 上的不同点, B_1, B_2, B_3 是直线 s 上的不同点, r 和 s 交于点 O, 那么, A_2B_3 与 A_3B_2 的交点 C_1, A_1B_3 与 A_3B_1 的交点 C_2, A_1B_2 与 A_2B_1 的交点 C_3 共线(即在一条直线上).

这个定理是巴普斯于公元三世纪给出的,在用欧几里德的方法证明后,它被简单地放入欧氏几何的命题中. 然而,这个定理只涉及点的连接和直线的相交. 其特色与平面几何中的典型定理十分不同. 不过,直到十七世纪,非度量几何学的基本定理才得以建立,而直到十九世纪中叶,这种几何学才彻底摆脱了度量概念.

2. 射影几何

我们已经注意到欧几里德几何学并不总是可观察的几何学. 例如,我们就从未见过平行线. 如果一个人站在直线铁轨的中央,铁轨看来似乎在地平面上的一点相交了. 如果用照相机拍摄的话,像片上就会显示同样的现象. 今后我们所涉及的几何学,有点和摄影相似,称为射影几何学.

在成像过程中,照相机(实际上)用直线把它视野里的每一点 A 与透镜上的某一点连接起来了. 也就是说,从 P 向每一点投影,然后用一个平面 π 去截这样产生的直线,就得到了底片. 对应于视野中的任意一点 A, 截面上有唯一一点 A', 即直线 AP 与 π 的交点,同样,

和任意一条包含 A 但不包含 P 的直线 q 对应于截面上有一条包含 A' 的直线 q'. 这可从以下事实得到：点 P 与直线 q 形成一平面，这平面与截面 π 的交线就是 q'. 现在假设摄影的对象由画在直立墙上的两条相交直线段和一个圆组成，实际上，任何物体的尺寸在像上都缩小了，然而重要的是，我们可以通过仅仅调节镜头到墙的距离就能改变像片上线段的长度，而且还有其它的变形，尽管像片上显示出两条相交线段，可是它们的交角通常与实物上两条线段的交角不同，圆通常也变成了椭圆.

在欧几里德几何学中，我们研究线段的长度和角的度量，它们在刚体运动下是不变的. 显然，这些熟悉的概念在新几何学中将不起作用了.

当然，我们必须小心地避免把照相机必然具有的某些局限性也赋予射影几何学. 例如，仅仅除了射影中心 P 之外，我们特别假定空间的每一个点都能从 P 投影，而截面可以是不包含 P 的任意全平面 π. 通常的情况是，空间每一点 $A\neq P$ 将对应 π 上唯一一点 A'. 可是也有例外，例如，当 AP 平行于 π 时，A 的对应点 A' 就得不出来. 出现这种例外，是由欧氏空间的特性，即不在平面 π 上的直线 p 或者与 π 相交于一点或者与 π 平行.

假设 A 是在平面 π 上没有对应点的点，π' 是通过 A 而不包含 P 的任意平面，r 和 s 是 π' 上相交于 A 的任意两条不同的直线，当从 P 点投影时，我们把 r, s 在 π 上的对应直线分别记为 r', s', 那么，就有 $r'\parallel s'$, 否则它们的交点就是 A 点的对应点，而且通过交换 π 和 π' 的位置，可以发现 π 上的两条平行直线 r' 和 s' 在 π' 上的对应直线是两条相交直线 r 和 s.

现在我们清楚了，在处理欧氏空间时，无论是点的存在性，还是交线的存在性，在射影和截影下，都不是不变的. 同样很清楚，这只是由于欧氏空间中存在着直线和平面的平行性所致.

有两种摆脱这种处境的方法：

(1) 如同欧几里德那样，建立一个恰好具有所需性质的空间.

(2) 从欧氏空间出发，并把它以某种方式改造成另一空间，其中平行性和度量概念完全消失.

我们暂不谈第一种方法，即公理化方法，把它留到我们对射影几何的内容，即对射影几何不变的是什么有了较多的了解之后. 在下面要谈到的第二种方法中，度量概念的问题容易解决，我们干脆不予考虑. 同时对欧氏空间的平行直线、平行平面则代之以“相交”，这样就消除了平行性的问题.

3. 射影空间

我们从欧氏几何中选取下列命题：

(a) 任意不同的两点确定唯一一条直线.

(b) 任意不共线的三点，或者任意一条直线和不在此直线上的一点确定唯一一个平面.

(c) 两条不同的共面直线，即在同一平面上的两条不同的直线或者交于一点，或者互相平行.

(d) 不在已知平面上的一条直线或者和该平面交于一点，或者和该平面平行.

(e) 两个不同的平面或者交于一条直线或者互相平行. 这些命题完全与度量概念无关，仅仅与点的联接及直线、平面的相交有关.

为了给射影几何构造一个空间，我们打算给欧氏空间增加某些东西，这些东西将不给定

义．为了区别起见，给它们取名为*理想点*、*理想直线*和*理想平面*．而且为了不引起混乱，以后我们将把欧氏几何的点、直线和平面称为*普通空间的普通点*、*普通直线*和*普通平面*．

理想元素没有先天的性质，我们将赋予他们这样一些性质，以便在新建立的空间，即射影空间中，确保以下命题对理想元素和普通元素所有可能的结合关系都成立．

(a′) 任意不同的两点确定唯一一条直线．

(b′) 任意不共线的三点，或者任意一条直线和不在此直线上的一点确定唯一一个平面．

(c′) 任意两条不同的共面直线交于唯一一点．

(d′) 不在给定平面上的任意一条直线与这个平面交于唯一一点．

(e′) 任意两个不同平面交于唯一一条直线．

我们来考虑普通平面和它上面的普通直线．在每一条普通直线上添加一个理想点(也称为*无穷远点*)，使得任何两条不同的相交普通直线有不同的理想点，而任意两条平行的普通直线有相同的理想点．一条普通直线连同它的理想点称为*拓广直线*．为了完全明确起见，设 r 和 s 是平面 π 上的两条不同的普通直线，R_∞ 和 S_∞ 分别是它们的理想点，得出拓广直线(r, R_∞)和(s, S_∞)．当 r 和 s 相交(于普通点)时，R_∞ 和 S_∞ 是不同的理想点；当 r 和 s 平行时，R_∞ 和 S_∞ 是同一理想点．因此 R_∞ 是两条拓广直线的交点．这样，(c′)对(r, R_∞)和(s, S_∞)成立，从而对任意两条拓广直线都成立，只要它们的普通直线共面就行了．

现在定义*拓广平面*为普通平面连同添加在它上面的普通直线上的全部理想点．显然，在拓广平面上，当一个点为普通点，另一个点为理想点时，和两个点都是普通点一样，(a′)成立．现在剩下两个点都是理想点的情况，如果这些理想点确定唯一一条直线，这条直线不可能是拓广直线(为什么？)现在我们在包含(r, R_∞)和(s, S_∞)的拓广平面上添加一条*理想直线* p_∞，这条直线包含 R_∞ 和 S_∞ 两点，因而可以说是由这两点所确定的理想直线．设(t, T_∞)(不同于 r, s)是拓广平面上另一条拓广直线，当 r 和 t 平行时，$T_\infty=R_\infty$，这时，(r, R_∞)和(t, T_∞)交于 p_∞ 上的点 R_∞．同样，当 s 和 t 平行时，(s, S_∞)和(t, T_∞)交于 p_∞ 上的点 S_∞．现在假设 R_∞, S_∞, T_∞ 是不相同的点，如果(c′)也适用于这种情况，即如果(t, T_∞)和 p_∞ 有唯一一个公共点，则 T_∞ 就一定在 p_∞ 上．于是，我们得到：添加在普通平面 π 的普通直线上的理想点的全体构成一条理想直线 p_∞．这样得到的拓广平面记为(π, p_∞)．

假定对普通空间的每一个普通平面都添加了一条理想直线，我们留给读者证明(d′)对于任意一个拓广平面和不在这个平面上的任意一条拓广直线都成立．下一步考虑两个拓广平面(ρ, r_∞)和(σ, S_∞)，其中 ρ 和 σ 是不同的普通平面．显然，当 ρ 和 σ 交于一条普通直线时(e′)成立．现在，假设 $\rho /\!/ \sigma$，在 ρ 上任取一条普通直线 p，在 σ 上任取一条与 p 平行的普通直线 q，则添加上 p 和 q 上的公共理想点 P_∞ 必须既在 r_∞ 上又在 S_∞ 上．同样，若 b 是 ρ 上任意一条与 p 不平行的普通直线，d 是 σ 上与 b 平行的任意一条普通直线，则 d 和 b 的公共理想点既在 r_∞ 上又在 S_∞ 上．这样，r_∞ 和 S_∞ 必须重合，因而(e′)对任意两个不同的拓广平面都成立．

尽管我们没有详细说明，当我们发现如果要使(b′)对三个不共线的理想点都成立，就有必要对普通空间添加一个包含这些点的*理想平面*(正如包含理想点 R_∞ 和 S_∞ 的理想直线添加在普通平面 π 上一样)时，我们就不会感到惊讶了．同样如果当两个平面中一个是任意拓广平面，另一个是这个理想平面时，(e′)也成立，那么理想平面就必须包含添加在普通空间的

所有普通直线上的所有理想点(正如包含 R_∞ 和 S_∞ 的理想直线必须包含添加在普通平面 π 的所有普通直线上的所有理想点一样). 普通空间连同理想平面一起,称为*拓广空间*.

最后,我们去掉普通点和理想点,拓广直线和理想直线. 拓广平面和理想平面之间的一切差别,暂时把任意点,无论是普通点还是理想点,称为*射影点*,把任意直线,无论是拓广直线还是理想直线,称为*射影直线*,把任意平面,无论是拓广平面还是理想平面,称为*射影平面*. 然而,当不存在混淆的可能性时,我们就称为射影空间的点、直线和平面.

4. 对 偶 原 则

在前一节里,我们通过对欧氏空间添加额外元素而得到射影空间. 值得注意的是,虽然保留了某些基本词汇—点,直线,平面,但是每个词汇的意义都被修改了. 这种修改最明显的结果可以通过比较欧氏几何的命题(a)—(e)与射影几何的命题(a′)—(e′)看出来.在简明性((a′)—(e′)的叙述较为简洁)和一般性(这里通过反复使用"任意"一词来强调)两方面都得到进展.

一个得到更为重要的进展是*对偶原则*. 依靠它,对于每一个命题我们只要交换其中某些关键词汇以及改变一些符号和说法就得到另一个命题,而作这种改变是为了使叙述有意义. 这个对偶原则在射影几何里成立而在欧氏几何里不成立. 对于射影平面有一个对偶原则,对于射影空间有另一个对偶原则. 我们首先研究射影平面,对于它上面的点和直线,明确的表示为(a′)和(e′):

任意不同的两点确定唯一一条直线

和

任意不同的两条直线确定唯一一个点.

这两种叙述可以简单地通过交换单词"点"和"直线"而互相得到(注意单词"平面",无论是明确阐述的或是暗示的,都不变). 在射影平面上,除了对偶定理(见下面的例 1.1),还有对偶图形. 例如,(1)由点 P 和通过它的两条直线所组成的图形(见图 1-2(a))的对偶是由直线 p 和它上面的两个点所组成的图形(见图 1-2(b)). (2)由一直线和它上面的一点(或一条直线和不在它上面的一点)所组成的图形是自对偶的,即每个图形的对偶图形是同一个类型的图形.

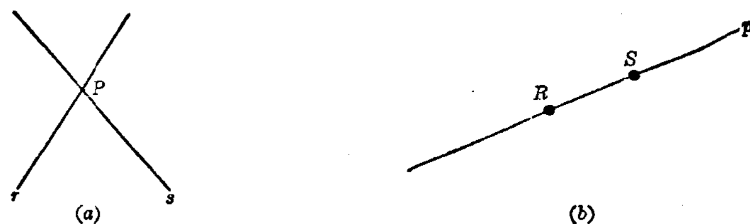


图 1-2

在讲例 1.1 之前,我们介绍一些在本书中始终要用到的符号. 如果 A, B, C, D 是不同的点,大家知道 AB 是表示点 A 和 B 所确定的直线. 现在我们约定:如果 a, b, c, d 是不同的直线且 a 和 b 共面,那么 $a\cdot b$ 就代表了 a 和 b 的交点. 同样,假定所有的点和直线都在同一平面上,我们约定,用 $AB\cdot CD$ 代表直线 AB 和 CD 的交点,$AB\cdot a$ 代表直线 AB 和直线 a 的交点,$(a\cdot b)(c\cdot d)$ 代表由点 $a\cdot b$ 和 $c\cdot d$ 确定的直线.

例 1.1 巴普斯定理重述如下:

在射影平面上，设 A_1, A_2, A_3 是直线 r 上的不同点，B_1, B_2, B_3 是另一条直线 s 上的不同点，那么，点 $C_1=A_2B_3\cdot A_3B_2$, $C_2=A_1B_3\cdot A_3B_1$, $C_3=A_1B_2\cdot A_2B_1$ 共线.

这个定理的对偶是:

在射影平面上，设 a_1, a_2, a_3 是通过点 R 的不同直线，b_1, b_2, b_3 是通过另一点 S 的不同直线，那么，直线 $c_1=(a_2\cdot b_3)(a_3\cdot b_2)$, $c_2=(a_1\cdot b_3)(a_3\cdot b_1)$, $c_3=(a_1\cdot b_2)(a_2\cdot b_1)$ 共点，即有一个公共的交点(见图 1-3).

尽管不久我们将仅仅考虑射影平面，但射影空间也确有一个对偶原则，虽然它在本书中很少用到. 例如，(a′)和(e′)是对偶命题，它们可以通过交换单词“点”和“平面”而互相转化(注意这里的单词“直线”不变). 同样，下列命题

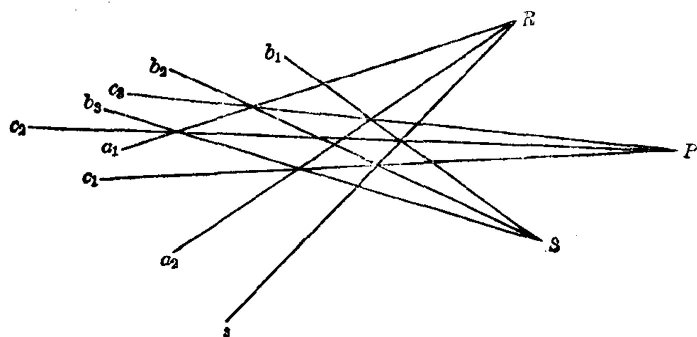


图 1-3

不共线的三个平面确定一个且仅确定一个点

的空间对偶是命题

(b′) 不共线的三点确定一个且仅确定一个平面.

实际上，命题(b′)是一个公理. 它的空间对偶是一个定理，根据对偶原则，这个定理就自然的成立而不需要证明. 但在欧氏几何中，它是需要证明的.

我们通常说，点 P 在直线 p 上，直线 p 通过点 P，直线 p 在平面 π 上，平面 π 通过或包含点 P 和直线 p，直线 p 和 q 交于 O 点，等等. 通过采用所谓“在……上”的语句，所给定义、定理或定理证明的写法就大大简化了. 我们准备采用这种写法，这样将写成: 点 P 在直线 p 上，直线 p 在平面 π 上，平面 π 在直线 p 和点 P 上，直线 p 和 q 都在点 O 上，等等.

5. 射 影 直 线

在普通平面 π 上，任取一条直线 q 和不在 q 上的一点 O(见图 1-4). 通过 O 作一条直线 p 交 q 于 P. 假定 p 绕 O 逆时针方向旋转，那么，p 将沿 q 朝箭头所指的方向移动，当 p 转到 OA 位置上时，即 $p\parallel q$ 时，交点 P 不存在了. 然而，一旦 p 越过 OA 位置，点 P 又重新出现了(但是在 q 的另一端)，并且沿箭头所指的方向移动，从而描出 q 的剩余部分. 这样，虽然 p 绕 O 的运动是连续的，没有跳跃，P 沿 q 的运动却不是如此. 如果我们处理的是射影平面，那么 p 的每一个位置都确定 q 上的一个点，所以，当 p 绕 O 旋转时，P 的连续运动就描绘出射影直线 q. 因此我们可以说:

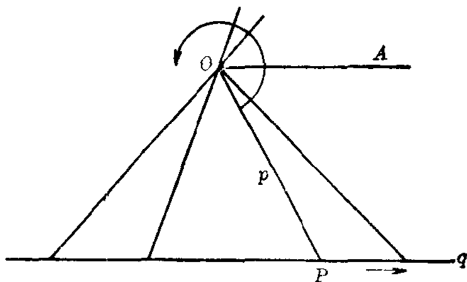


图 1-4

射影直线的表现好象是封闭的一样.

读者不妨试着在大脑中形成封闭直线的图像. 然而，为了指出普通直线和射影直线的其它区别. 我们将用圆或椭圆作为射影直线的模型(见图 1-5(a))，而用去掉一点的圆或椭圆作为普通直线的模型(见图 1-5(b)).



图 1-5

从图 1-5(*b*)中可以清楚地看到，普通直线上任意一点 A 把它分为两段，而在某一段上取另一点 B，足以把这一段和另一段区别开来．从图 1-5(*a*)中可以看出，把射影直线分为两段需要两个不同的点 A 和 B，而在某一段上的另取一个点 C 足以把这一段与另一段区分开来．描述普通直线与射影直线之间的这个差别的第二种方法如下：在普通直线上具有一条路从一点 A 通向另一点 B，而在射影直线上，沿 $\underset{\smile}{AB}$ 或 $\overset{\frown}{AB}$ 中任一条路线移动都能从点 A 到达另一点 B.

现在考虑射影直线并在其上标出四点(假定不同)A、B、C、D. 在研究点时 C、D 关于点对 A、B 的位置时有两种情况：(1)点对 C、D 位于点对 A、B 所分直线的某一段上(见图 1-6(*a*))．(2)点对 C、D 分别位于点对 A、B 所分直线的两段之上(见图 1-6(*b*))．在后一种情况，我们说点对 A、B 被点对 C、D 所分隔．这样，如果 A、B、C、D 是射影直线上不同的点，点对 A、B 被点对 C, D 所分隔是指点 C 位于 $\underset{\smile}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 中的一段上，而点 D 位于另一段上．叙述这个事实的另一种说法是，如果 A, B, C, D 是射影直线上不同的点，点对 A, B 被点对 C, D 所分隔是指从 A 到 B 沿着直线移动时不可能不遇到点对 C, D 中的某一个点．容易理解，如果点对 C、D 分隔点对 A、B, 那么点对 A、B 也分隔点对 C、D.

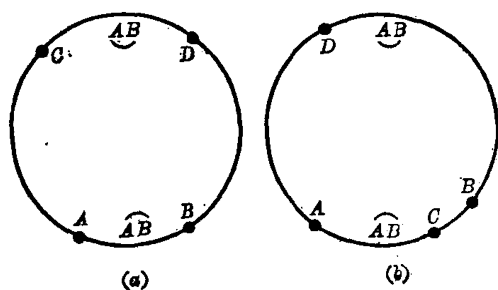


图 1-6

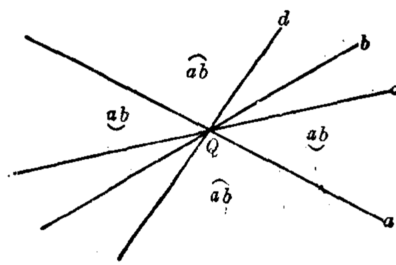


图 1-7

射影直线 q 与其上标出的不同四点 A, B, C, D 的平面对偶：是点 Q 以及通过点 Q 作出的四条不同的共面直线 a, b, c, d. 考虑图 1-7 中的线对 a, b, 由线对 a, b 分隔平面形成的两部分，用 $\overset{\frown}{ab}$ 和 $\underset{\smile}{ab}$ 表示．我们可以毫不费力地说：如果 a, b, c, d 是点 Q 上不同的共面直线，那么线对 a、b 被线对 c、d 所分隔，是指直线 c 位于平面的一部分内，而直线 d 位于平面的另一部分内.

6．平面内的透视束

所谓射影空间内的图形是指空间的点，直线和平面的任一集合；而射影平面内的图形是指平面上的点和直线的任一集合．在这一节中，我们限于研究射影平面的两类图形：

(a) 平面内一条直线上的点的全体称为*点列*(或*点束*). 图 1-8(a)中直线 p 上的点列记为 $p(A, B, C, D, \cdots)$, 这里 $A, B, C, D, \cdots$ 是 p 上的不同点. 点 $A, B, C, D, \cdots$ 称为*元素*, 直线 p 称为点列的*基*.

它的平面对偶是:

(b) 平面内一个点上的直线的全体称为*直线束*(*线束*). 图 1-8(b)中的点 P 的线束记为 $P(a, b, c, d, \cdots)$, 这里 $a, b, c, d, \cdots$ 是 P 上的不同直线. 直线 $a, b, c, d, \cdots$ 称为*元素*, 点 P 称为线束的*中心*.

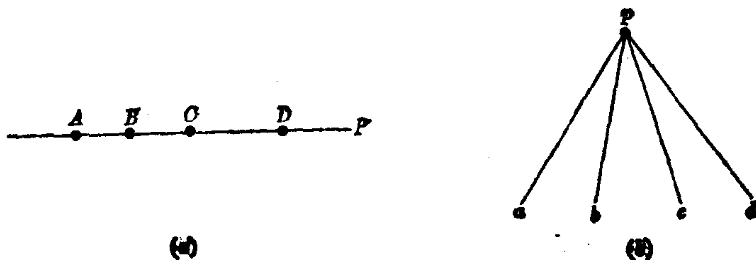


图 1-8

两个束的元素之间存在一个*一一对应*是指存在某个法则, 它使得对第一个(第一个)束中的每一个元素, 在另一个(第二个)束中都有唯一的一个元素与它对应, 反过来, 对于第二个束中的每一个元素, 在第一个束中都有唯一的一个元素和它对应. 在两个束之间(也可以是任意种类的两个图形之间)的这样一种对应中, 每一元素连同它所对应的元素称为*对应*(*同调*)*元素*. *恒等对应*使给定图形的每一元素与自身对应. 这种对应意义不大.

考虑图 1-9(a)中的线束 $P(a, b, c, d, \cdots)$, 它被不在点 P 上的任一直线 p 所截, 在线束和所得点列(在 p 上)之间, 由"在上"这个关系自然建立了一个一一对应, 因为, 对于在 P 上的线束中的每一直线, 都有在 p 上的点列中的唯一一点(即在线束 P 中这条直线 p 上的那

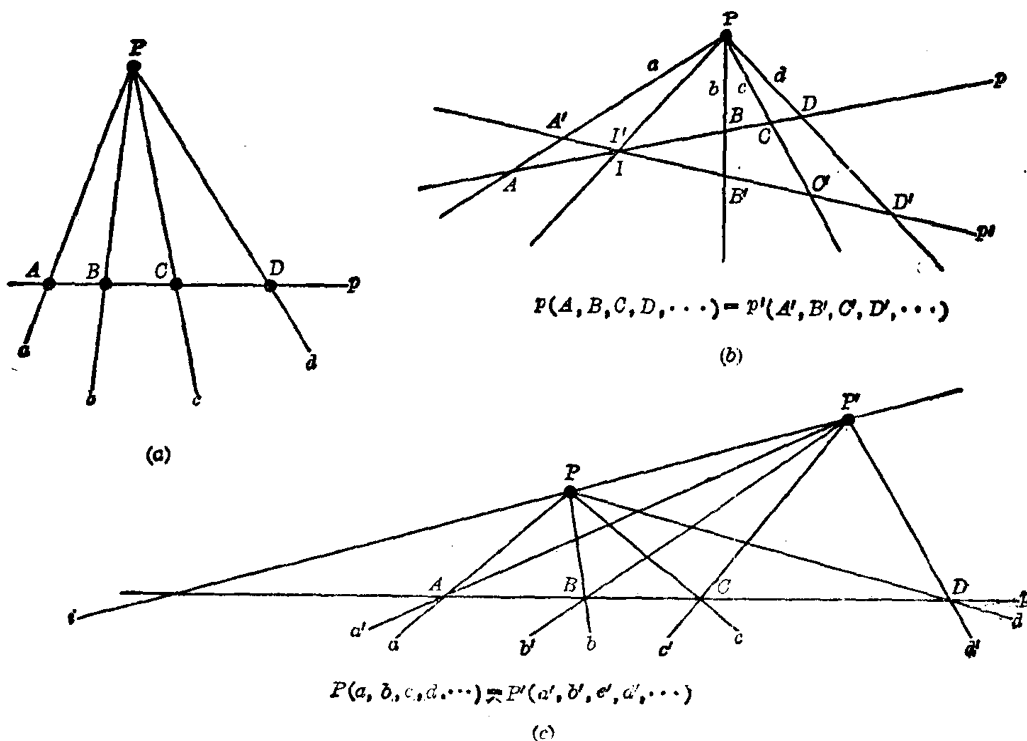


图 1-9

个点)与它对应，而且这个线与点的对应是可逆的，也就是说，对于在p上的点列中的每一点，都有在P上的线束中的唯一一条直线(即在点列中这个点上的那条直线)与它对应. 注意表述这个对应的最好方式是用相同的字母(小写的和大写的字母)表示某条直线和与它对应的点.

上述一一对应称为透视，记为

$$P(a, b, c, d, \cdots)\overline{\wedge}p(A, B, C, D, \cdots).$$

我们说线束$P(a, b, c, d, \cdots)$与点列$p(A, B, C, D, \cdots)$成透视，并记为

$$P(a, b, c, d, \cdots)\overline{\wedge}p(A, B, C, D, \cdots)$$

或

$$p(A, B, C, D, \cdots)\overline{\wedge}P(a, b, c, d, \cdots).$$

为了和将要介绍的其它透视相区别，我们称这种透视为基本透视.

考虑图 1-9(b)中的线束$P(a, b, c, d, \cdots)$，它被不在P上的两条不同直线p和p'所截. 从以上的讨论可知，有两个基本透视

$$P(a, b, c, d, \cdots)\overline{\wedge}p(A, B, C, D, \cdots)$$

和

$$P(a, b, c, d, \cdots)\overline{\wedge}p'(A', B', C', D', \cdots),$$

由于这些透视是可逆的，能够结合成下列形式：

$$p(A, B, C, D, \cdots)\overline{\wedge}P(a, b, c, d, \cdots)\overline{\wedge}p'(A', B', C', D', \cdots).$$

显然在p和p'上的点列间建立了一个一一对应(A和A', B和B', C和C', $\cdots$)，在这个对应下，p上的点列中的每一点与它在p'上的对应点确定在P上的线束中的唯一一条直线. 我们现在用

$$p(A, B, C, D, \cdots)\overset{P}{\overline{\wedge}}p'(A', B', C', D', \cdots)$$

来代替上面的基本透视序列. (读作：通过点P点列$p(A, B, C, D, \cdots)$与点列$p'(A', B', C', D', \cdots)$成透视对应). 点$P$称为透视中心. 这样，我们定义：

如果在不同的直线p, p'上的两个点列的点之间存在一个一一对应，并且对应点的连线在P上，则这两个点列称为通过点P成透视对应.

在上面的透视中，p和p'的公共点将起着独特的作用. 这个点作为p上的点时记为I，作为p'上的点时记为I'，那么I的对应点是$I'=I$, I称为这个透视的自对应点或不变点. 我们有：

定理 1.1 在不同直线p和p'上的两个点列间的每一透视下，点$I=p\cdot p'$是自对应点.

当p上的任意两点(例如B和C)与它们在p'上的对应点(B'和C')已知时，对应点对的连线BB'和CC'唯一地确定了P. 于是有：

定理 1.2 p上的任意两个不同点，而每一点都不同于$p\cdot p'$，以及它们在p'上的对应点则唯一确定了在不同直线p和p'的两个点列间的透视.

在不同直线上的两个线束间的透视. 定义如下：

如果在不同点上的两个线束$P(a, b, c, d, \cdots)$和$P'(a', b', c', d', \cdots)$的直线之间存在一个一一对应，并且对应直线的交点在$p$上，则这两个线束称为通过直线$p$成透视对应.

这个透视(见图 1-9(c))，记为：

$$P(a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots)\overset{p}{\overline{\wedge}}P'(a',\ b',\ c',\ d',\ \cdots),$$

这里，直线p称为透视轴．对于这样的透视，由对偶原则，我们有：

定理 1.1′ 在不同点P和P'上的两个线束间的每一透视下，直线$i=PP'$是自对应线．

定理 1.2′ P上的任意两条不同直线中，每一条直线都不同于PP'以及它们在P'上的对应直线，则唯一确定了在不同点P和P'的两个线束间的透视．

我们促使读者详细写出前几段中关于图 1-9(b)的对偶，而不要不作进一步的研究就把它作为这一段中关于图 1-9(c)的叙述的定理来接受．

7．平面内的射影束

在上一节中我们定义透视

$$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overset{P_1}{\overline{\wedge}}p_2(A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ \cdots)$$

为在不同直线的两个点列间建立了一个一一对应关系，它使对应点的连线在P_1上．透视也可以看作一类变换，即把p_1上的点集转化为p_2上的点集的一种方法或手段．现在考虑第二个透视

$$p_2(A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ \cdots)\overset{P_2}{\overline{\wedge}}p_3(A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3,\ \cdots),$$

它把p_2上的点集转化为另一条直线p_3上的点集．连续进行这两个透视得到一个变换(见图 1-10)，它把p_1上的点集转化为p_3上的点集．一般说来，这个变换不是透视．为了检验这一点，只要连接图 1-10 中的对应点A_1和A_3，B_1和B_3，C_1和C_3，D_1和D_3，…，并验证这些连线不共点或验证$I_1=p_1\cdot p_3$在这个变换下不是保持不变的．

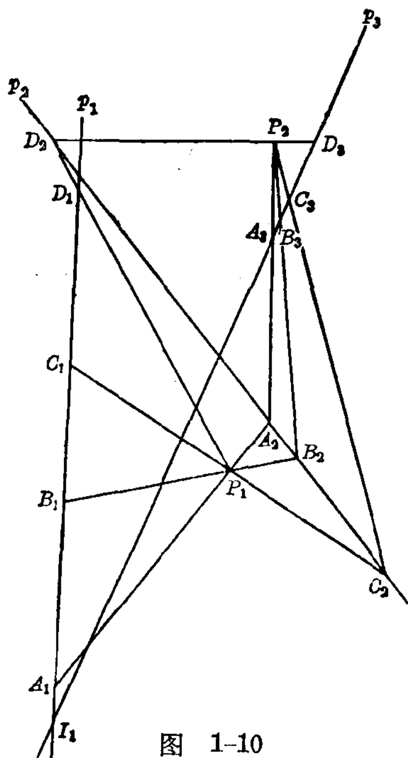


图 1-10

在这两个点列间的这样一个一一对应称为射影对应或射影变换，记为

$$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overline{\wedge}p_3(A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3,\ \cdots).$$

这样，两个点列间的一个一一对应称为射影对应(或简称射影)是指这个对应是一系列透视的结果．

图 1-11 表示在不同直线上的两个点列间的一个射影

$$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overline{\wedge}p_4(A_4,\ B_4,\ C_4,\ D_4,\ \cdots),$$

它由以下一系列透视确定：

$$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overset{P_1}{\overline{\wedge}}p_2(A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ \cdots)$$
$$\overset{P_2}{\overline{\wedge}}p_3(A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3,\ \cdots)\overset{P_3}{\overline{\wedge}}p_4(A_4,\ B_4,\ C_4,\ D_4,\ \cdots).$$

类似地，射影

(a) $$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overline{\wedge}p_n(A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n,\ \cdots)$$

图 1-11

可由一系列透视

(b) $$p_1 \overset{P_1}{\overline{\wedge}} p_2 \overset{P_2}{\overline{\wedge}} p_3 \overset{P_3}{\overline{\wedge}} \cdots \overset{P_{n-1}}{\overline{\wedge}} p_n$$

确定. 仅有的限制是 P_i 不在 p_i 上, p_{i+1} 不在 P_i 上. 我们顺便注意到:

(1) 两个点列间的透视是射影的一种特殊情况,反之则不然.

(2) 射影(a)是可逆的, 也就是说, 由(a)可推出

(a′) $$p_n(A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n,\ \cdots)\overline{\wedge} p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots).$$

把(b)倒过来写就得到了建立(a′)的透视序列.

上面所有的直线 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 不必都不相同, 特别地, 如果 $p_n = p_1$, 则有

(c) $$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overline{\wedge} p_1(A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n,\ \cdots).$$

例如, 读者只要把图 1-11 中的直线 P_2A_2, P_2B_2, P_2C_2, P_2D_2, $\cdots$ 分别延长交 p_1 于 A_5, B_5, C_5, D_5, $\cdots$, 把同一图中的 P_3A_3, P_3B_3, P_3C_3, P_3D_3, $\cdots$ 分别延长交 p_1 于 A_6, B_6, C_6, D_6, $\cdots$, 则有

$$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\cdots)\overset{P_1}{\overline{\wedge}} p_2(A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ \cdots)\overset{P_2}{\overline{\wedge}} p_1(A_5,\ B_5,\ C_5,\ D_5,\ \cdots)$$

和

(d) $$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overline{\wedge} p_1(A_5,\ B_5,\ C_5,\ D_5,\ \cdots)$$

以及 $$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\overset{P_1}{\overline{\wedge}} p_2(A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ \cdots)$$

$$\overset{P_2}{\overline{\wedge}} p_3(A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3,\ \cdots)\overset{P_3}{\overline{\wedge}} p_1(A_6,\ B_6,\ C_6,\ D_6,\ \cdots)$$

和

(e) $$p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\cdots)\overline{\wedge} p_1(A_6,\ B_6,\ C_6,\ D_6,\ \cdots).$$

当然现在在直线 p_1 上仅有一个点列. 以上每一射影的结果是把这个点列变为自身, 因为每

一射影要求p_1的每一点有两个标号，所以我们认为这些射影中的每一个是在同一直线上的不同点列间的变换，问题就简化得多了．相应地，我们把(c)，(d)，(e)称为在直线p_1的迭置点列间的射影．

按照对偶原则，存在直线束到自身的射影．为了方便起见，我们认为这是在同一点上的不同线束间的射影，并称为在一点上的迭置线束间的射影(作为一个例子，见习题1.13)．

在迭置束间的射影中，可能会出现一个或多个元素是自对应元素的情况．(下一章我们将证明，如果有多达三个的元素是自身对应元素，那么每一个元素都是自对应元素．)迭置射影的自对应元素常常称为射影的*二重元素*(*不变元素*)．在习题1.16和1.18中给出了有两个二重元素的迭置射影的例子．

8．有关射影的定理

在以下两章中，我们将回答下列问题：

(1) 给定在前一节中用透视序列(b)定义的射影(a)能用少于$n-1$个的透视对应来确定吗？

(2) 给定射影(a)，它在什么情况下是透视？

(3) 给定在不同直线p_1和p_n上或迭置在同一直线p上的两个点列，在什么条件下能在它们之间建立一个射影？

我们必须记住对于这些与点列有关的问题，都存在一个与线束有关的对偶命题．虽然我们能够把注意力仅限于点列，并且不作进一步的研究就接受每一个已得定理的对偶命题，我们在这里将不采取这个方法．事实上，我们将有目的地来回往返于关于点的定理和关于直线的定理之间．一般不给出所述定理及其对偶命题的证明．这样如果某一个定理在课本上没给出对偶命题和它的证明，我们将留给读者去补足．

在习题1.4中，我们证明

定理1.3　在不同直线或同一直线上给定两组分别共线的三点A_1, B_1, C_1和A_2, B_2, C_2，至少存在一个射影使得A_1, B_1, C_1分别变到A_2, B_2, C_2．

在习题1.5和1.6中，我们证明下列定理的一部分和另一部分的对偶命题．

定理1.4　设A, B, C, D是一条直线上的不同点，存在射影分别使得

(a) A, B, C, D各变到B, A, D, C．(b) A, B, C, D各变到D, C, B, A．(c) A, B, C, D各变到C, D, A, B．

§1.2　问题及其解

1.1　设(r, R_∞)是拓广平面的任一拓广直线，A, B, I是这条直线上不同的普通点，P是这个平面上不在r上的任一普通点．从P向直线上的这些点投影并被平面上经过I但不过P且不同于(r, R_∞)的任一拓广直线(r', R'_∞)所截，找出：(a) A, B和I的对应点；(b) R_∞的对应点R'；(c) (r, R_∞)上与R'_∞对应的点R．

解：(a) A的对应点A'是A的投影线(PA, S_∞)和(r', R'_∞)的交点，B的对应点B'是(PB, T_∞)和(r', R'_∞)的交点．因为I的投影线(PI, U_∞)交(r', R'_∞)于I，所以I的对应点是I本身．

(b) R_∞ 的射影线是拓广直线(s, R_∞)，这里 s 是通过 P 且平行于 r 的普通直线. R_∞ 的对应点 R' 是 r' 和 s 的交点.

(c) R 是 r 和过 P 且平行于 r' 的直线 s' 的交点.

1.2 假定所有的点和直线都共面，下列命题中哪些属于平面射影几何？对于每一个属于平面射影几何的命题. 写出它的平面对偶命题.

(a) 无三点共线的四个不同点有六条连线.

(b) 平行四边形对角线互相平分.

(c) 如果 A, B, C 是不同的不共线点，D 和 E 是不同的点，使得 B, C, D 共线和 C, A, E 共线，那么，存在一点 F 使得 A, B, F 共线且 D, E, F 共线.

(d) 内接于半圆的角是直角.

解: 命题(b)和(d)与线段的长度和角的度量有关，不属于射影几何学.

(a)的对偶是: 无三条共点的四条不同直线有 6 个交点.

(c)的对偶是: 如果 a, b, c 是不同的不共点直线，d 和 e 是不同直线，使得 b, c, d 共点和 c, a, e 共点，那么存在一条直线 f，使得 a, c, f 共点且 d, e, f 共点.

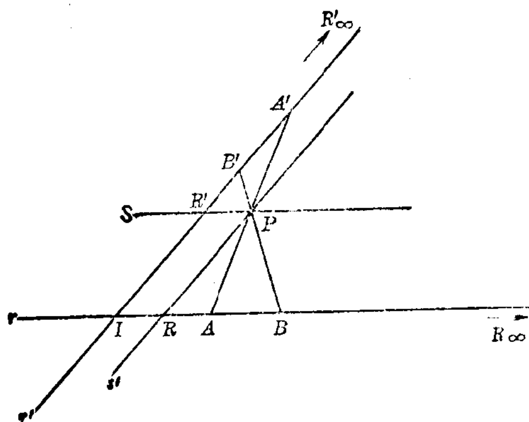


图 1-12

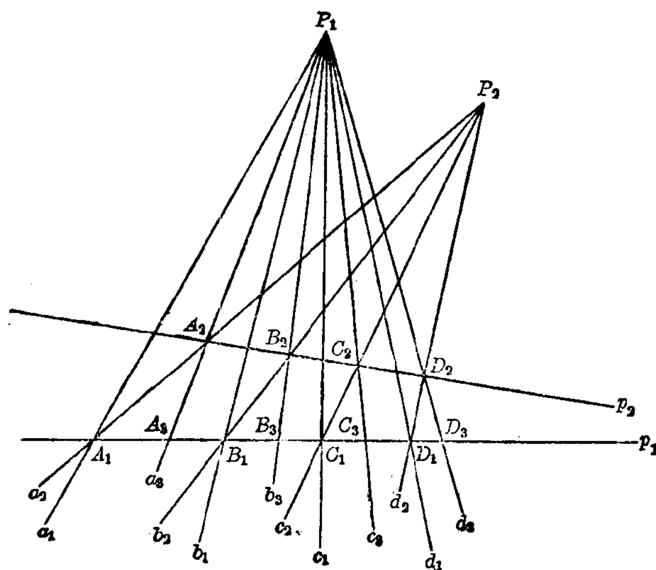


图 1-13

1.3 作出两个射影的叠置线来

解: 考虑图 1-13 中的线束 $P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots)$ 它被不在 P_1 上的直线 p_1 所截，再从不在 p_1 上且不同于 P_1 的 P_2 向 p_1 上所截得的点列投影. 然后用不在 P_2 上且不同于 p_1 上的直线 p_2 去截在 P_1 上的直线束. 再从 P_1 用直线 $a_3, b_3, c_3, \cdots$ 向 p_2 上所截得的点列投影. 根据作图有:

$$P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots) \overset{p_1}{\overline{\overline{\wedge}}} P_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \cdots) \overset{p_2}{\overline{\overline{\wedge}}} P_1(a_3, b_3, c_3, d_3, \cdots)$$

所以
$$P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots) \overline{\wedge} P_1(a_3, b_3, c_3, d_3, \cdots).$$

1.4 证明: 给定两组分别共线的三个不同点 A_1, B_1, C_1 和 A_2, B_2, C_2，至少存在一个射影使得: A_1, B_1, C_1 分别变到 A_2, B_2, C_2.

证明：为了正确地理解这个定理的意义，也为了介绍一个今后在类似情况下使用的简单记号，假定 A_1, B_1, C_1 在直线 r 上，A_2, B_2, C_2 在另一直线 s 上．我们要证明在 r 和 s 的点列间存在射影：

(a) $$r(A_1,\ B_1,\ C_1,\ \cdots)\barwedge s(A_2,\ B_2,\ C_2,\ \cdots).$$

注意到我们并不关心 r 上的其它点在 s 上的对应点是什么，所以可能存在许多满足定理条件的不同射影．因为我们只关心给定的三元点组，所以(a)可以相应地简化为

$$r(A_1,\ B_1,\ C_1)\barwedge s(A_2,\ B_2,\ C_2).$$

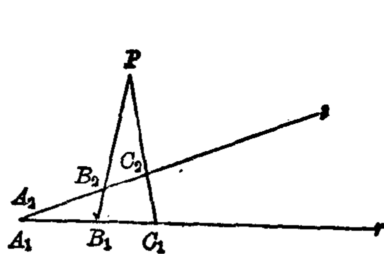
有三种情况需要考虑：

(1) 参看图 1-14(a)，假设 A_1, B_1, C_1 在直线 r 上，A_2, B_2, C_2 在另一直线 s 上，且 $A_1=A_2=r\cdot s$．设 $P=B_1B_2\cdot C_1C_2$，在这样建立起来的射影中，我们有 $r(A_1, B_1, C_1)\overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}}s(A_2, B_2, C_2)$，从而 $r(A_1,\ B_1,\ C_1)\barwedge s(A_2,\ B_2,\ C_2)$，当 $r\cdot s=B_1=B_2$ 或 $r\cdot s=C_1=C_2$ 时可得出相同的结论．

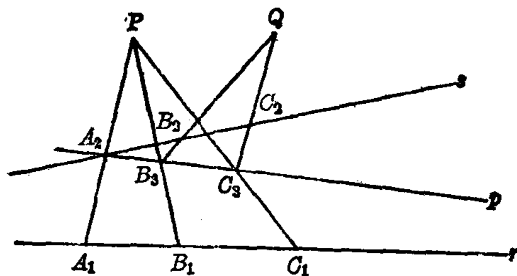
(2) 参看图 1-14(b)，假定 A_1, B_1, C_1 在 r 上，A_2, B_2, C_2 在 s 上，且在 $r\cdot s=A_1=A_2$, $r\cdot s=B_1=B_2$, $r\cdot s=C_1=C_2$ 中没有一个成立．在 A_1A_2 上任取不同于 A_1 和 A_2 的点 P，在 A_2 上任取不同于 A_1A_2 和 s 的一条直线 p．从 P 把 A_1, B_1, C_1 投影到 p 上的 A_2, B_3, C_3，令 $Q=B_2B_3\cdot C_2C_3$，则 $r(A_1,\ B_1,\ C_1)\overset{P}{\barwedge}p(A_2,\ B_3,\ C_3)\overset{Q}{\barwedge}s(A_2,\ B_2,\ C_2)$，从而得到

$$r(A_1,\ B_1,\ C_1)\barwedge s(A_2,\ B_2,\ C_2).$$

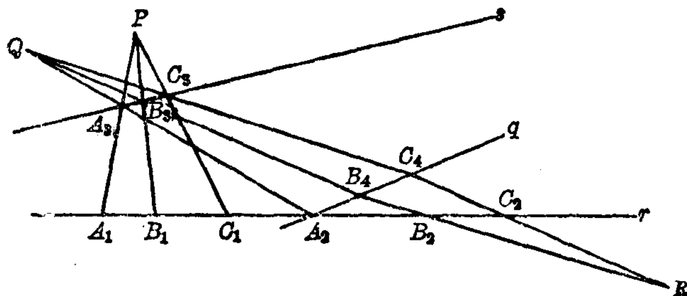
(3) 参看图 1-14(c)，假设 A_1, B_1, C_1和 A_2, B_2, C_2 都是 r 上的共线点．从不在 r 上的任一点 P，把 A_1, B_1, C_1 投影到任一直线 s 上的 A_3, B_3, C_3．这里 s 不在 P, A_1, B_1 或 C_1 上．重复(2)中的步骤，我们可以用至多两个透视把 A_3, B_3, C_3 分别变到 A_2, B_2, C_2．因此所求的射影为：



(a)



(b)



(c)

图 1-14

$$r(A_1, B_1, C_1)\barwedge r(A_2, B_2, C_2).$$

1.5 给定直线 p 上的四个不同点 A, B, C, D，找出一个射影使得:

$$p(A, B, C, D)\barwedge p(C, D, A, B).$$

解: 这是用习题1.4的较简单符号表示的定理 1.4(c). 参看图 1-15. 从不在 p 上的任一点 P 向这些给定点投影，再用一条在 B 上且不同于 p 和 PB 的任意直线 q 去截，分别得到点 A', B', C', D'. 注意 $B'=B$，连接 A' 和 C 的直线 $A'C$ 交 $PD=r$ 于 D''，则有

$$p(A, B, C, D)\overset{P}{\barwedge} q(A', B', C', D')\overset{C}{\barwedge} r(D'', D, P, D')\overset{A'}{\barwedge} p(C, D, A, B)$$

所以
$$p(A, B, C, D)\barwedge p(C, D, A, B).$$

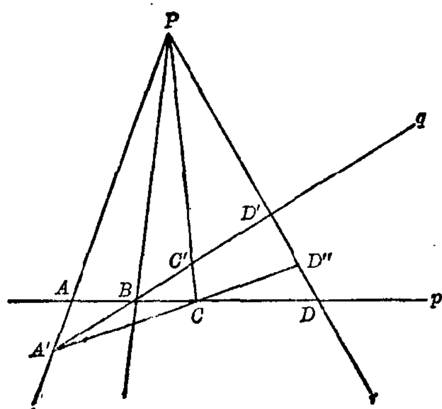


图 1-15

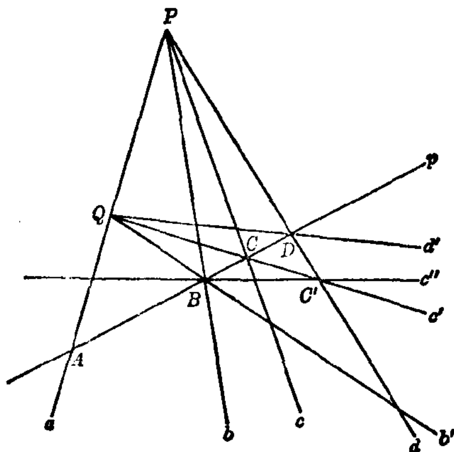


图 1-16

1.6 给定在点 P 上的四条不同直线 a, b, c, d，作出一个射影，使得

$$P(a, b, c, d)\barwedge P(b, a, d, c).$$

解: 考虑图 1-16 中在 P 上的直线 a, b, c, d，用不在 P 上的任一直线 p 去截，在从直线 a 上不同于 P 且不在 p 上的点 Q 向所截得的点 A, B, C, D 投影.

设 $QB=b'$, $QC=c'$, $QD=d'$, $c'\cdot d=C'$, $BC'=c''$. 则有

$$P(a, b, c, d)\overset{p}{\barwedge} Q(a, b', c', d')\overset{d}{\barwedge} B(b, b', c'', p)\overset{c'}{\barwedge} P(b, a, d, c)$$

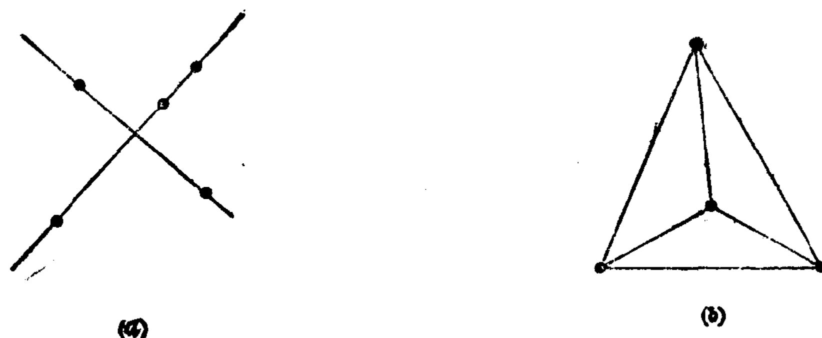
所以,
$$P(a, b, c, d)\barwedge P(b, a, d, c).$$

§1.3 补 充 题

1.7 把一个给定圆投影成(a)另一个圆, (b)一个椭圆, (c)一条双曲线, (d)一条抛物线.

1.8 在射影平面上给定图 1-17(a)和(b). 用语言叙述每一个图形及其平面对偶，并画出图形.

提示: 图 1-17(a)是由两条不同直线组成的，在一条直线上标有两个不同点，在另一条直线上标有三个不同点，且这两组点都不是这两条直线的交点. 它的平面对偶是由两个不同点所组成. 在一点上有两条不同直线，在另一点上有三条不同直线，且这五条直线都不是这两个点的连线.



(a)　　　　(b)

图 1-17

1.9 画出习题1.2(a), 1.2(c)以及它们的对偶图形.

1.10 写出平面射影几何下述定理的对偶：如果 R_1, R_2, R_3 是直线 r 上的不同点，S_1, S_2, S_3 是另一直线 s 上的不同点，直线 R_1S_1, R_2S_2, R_3S_3 都在点 P 上，那么点 $R_1S_2\cdot R_2S_1$, $R_2S_3\cdot R_3S_2$, $R_3S_1\cdot R_1S_3$ 都在一条与 r 和 s 共点的直线 p 上. 画出这个定理和它的对偶的图形.

1.11 用圆作为射影直线的模型，验证：

(a) 射影直线上四个不同点 A, B, C, D 有六种不同的排法.

(b) 如果 A、B、C、D 是射影直线上四个不同点，则或者 C, D 分隔 A, B, 或者 B, D 分隔 A, C, 或者 A, D 分隔 B, C.

(c) 如果 A, B, C, D, E 是射影直线上不同点，且 C、D 分隔 A、B; B、E 分隔 A、C, 则 D、E 分隔 A、B.

(d) 如果 A、B、C、D、E 是射影直线上的不同点，且 C, D 分隔 A, B. 则 D, E 至多能分隔 A, B; A, C; B, C 中的两组.

1.12 证明：在不同的共面直线 p 和 p' 上的两点列间的一个透视中，总存在唯一一个自对应点. 叙述并证明它的平面对偶命题.

1.13 (a)在图1-9(b)中，在 p 上任取另一点 X, 并作出它在 p' 上的对应点 X'; 在 p' 上任取另一直线 Y' 并作它在 P 上的对应直线 Y.

1.14 在图 1-11 中设 $I_1=p_1\cdot p_2$, $I_2=p_2\cdot p_3$, $K_2=p_2\cdot p_4$

(a) 在射影 $p_1\barwedge p_4$ 中，在 p_4 上确定 I_1 和 p_1 上另一点 X_1 的对应点.

(b) 在透视 $p_1\overset{P_1}{\doublebarwedge} p_2$ 中，在 p_1 上确定 I_2 和 I_1 的对应点，然后在射影 $p_1\barwedge p_4$ 中，在 p_4 中确定 I_1 的对应点.

(c) 在射影 $p_2\barwedge p_4$ 中，在 p_4 上确定在 p_2 上点 K_2 的对应点 K_4, 再在 p_2 上确定点 L_2, 使得它在 p_4 上的对应点是 $L_4=K_2$.

1.15 把图 1-13 中的射影 $P_1\barwedge P_2$ 表示成一系列基本透视：

$$P_1(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ \cdots)\doublebarwedge p_1(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ \cdots)\doublebarwedge\cdots.$$

1.16 在图 1-13 中，设 $P=p_1\cdot p_2$, $s_1=P_1P_2$, 在射影

$$P_1(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ \cdots)\barwedge P_1(a_3,\ b_3,\ c_3,\ d_3,\ \cdots)$$

中找出对应于自身的直线 s_1, 这样 s_1 是这个射影的二重直线. 证明，$t_1=PP_1$ 也是这个射影的二重直线. 什么时候有 $t_1=s_1$? 什么时候有 $t_1\neq s_1$?

1.17 在图 1-16 中，在 P 上任取另一直线 e 并作出它的对应直线 f，会出现 f 的对应直线是 e 的情况吗？

1.18 考虑图 1-16 中的透视，$P(b, c, d, \cdots)\overset{p}{\barwedge}Q(b', c', d', \cdots)$. 在 p 上任取不同于 A, B, C, D 的一点 S，在 S 上任取不同于 p 也不在点 P 或 Q 上的直线 s，设 $a\cdot s=R$, $b\cdot s=B'$, $c\cdot s=C'$, $d\cdot s=D'$; $b'\cdot s=B''$, $c'\cdot s=C''$, $d'\cdot s=D''$.

(a) 证明 $s(B', C', D', \cdots)$ 和 $s(B'', C'', D'', \cdots)$ 成射影对应.

(b) 证明在这个射影中 R 和 S 都是二重点.

1.19 (a) 在任一直线 p 上取三个不同点 A, B, C，从不在 p 上的任一点 P 向这些点投影，再用 A 上不同于 p 和 AP 的任意直线去截，得到点 A', B', C'，设 $Q=B'C\cdot BC'$. 证明，存在一个射影使得 $p(A, B, C)\barwedge p(A, C, B)$.

(b) 类似地得出 $p(A, B, C)\barwedge p(B, A, C)$, $p(A, B, C)\barwedge p(B, C, A)$, $p(A, B, C)\barwedge p(C, A, B)$ 和 $p(A, B, C)\barwedge p(C, B, A)$.

1.20 叙述定理 1.3 的对偶，把它称为定理 1.3'. 不利用对偶原则证明这个定理.

1.21 在图 1-14(c) 中，射影 $p(A_1, B_1, C_1)\barwedge p(A_2, B_2, C_2)$ 能表成不少于三个透视的乘积，给出一个例子，使得同一直线上的两个三元点组 A_1, B_1, C_1 和 A_2, B_2, C_2（这些点互不相同）间的射影能表成两个透视的乘积.

1.22 证明定理 1.4 的(a)和(b). 并证明(b)和(c)的对偶.

第二章 交 比

§2.1 基本内容

1. 分 比

回忆在欧氏平面几何学中所研究过的图形性质，它们恰好都在刚体运动的变换平移和旋转的集合下保持不变．在射影平面几何学中，射影变换由射影和截影所组成．我们自然要问：除了点和直线外，在射影和截影下有没有不变性质？为了回答这个问题，我们再次回到欧氏平面．

考虑欧氏平面的一条任意直线p(见图 2-1)以及由p上不同的两个点A和B确定的线段AB，用箭头所指方向代表p的正向(当然，我们也可以选择相反的方向)．选定方向以后，直线p就称为有向直线，线段AB既有长度又有方向(总是从A到B)，称为有向线段．线段BA和线段AB长度相同但方向相反，因此$BA=-AB$，且

$$AB+BA=0. \tag{1}$$

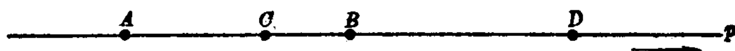


图 2-1

设C是直线p上不同于A和B的任意一点，因为$AB=AC+CB$，(1)式可以写成下面形式：

$$AC+CB+BA=0. \tag{2}$$

我们留给读者去验证(见习题 2.7)(1)和(2)都与p的方向无关，并且(2)还与C和A，B的相对位置无关．

最后，设D是直线p上不同于A、B、C的另外一点，在习题 2.1 中我们将证明关系式

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0. \tag{3}$$

当A，B，C是有向直线p上的三个不同点时，线段AB被C所分的分比(AB, C)定义为

$$(AB, C)=AC/BC. \tag{4}$$

当C在线段AB上时(见图 2-1)，AC与BC符号相反，从而$(AB, C)<0$；当C不在线段AB上时，$(AB, C)>0$．我们再次请读者证明(4)与p的方向无关．

2. 欧氏平面内的交比

设A, B, C, D是有向直线p上任意四个不同的点(见图 2-1)，分比(AB, C)与(AB, D)的商定义为A、B关于C、D的交比(二重比)，记作(A, B, C, D)，即

$$(A, B, C, D)=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}. \tag{5}$$

因为每一个分比都与 p 的方向无关，所以(5)式也与 p 的方向无关.

当 C、D 都在线段 AB 上时，(AB, C) 和 (AB, D) 都为负，从而 (A, B, C, D) 为正. 当 C 点在线段 AB 上而 D 点不在时，(AB, C) 为负，(AB, D) 为正，从而 (A, B, C, D) 为负. 请读者验证，当 C, D 都不在线段 AB 上时，(A, B, C, D) 为正；当 D 点在 AB 上而 C 点不在时，(A, B, C, D) 为负.

3. 交比的不变性

考虑图 2-2 中有向直线 r 上的四个不同点 A, B, C, D，通过不在 r 上的任意一点 P，把这些点投影到不在 P 上的另一有向直线 s 上，得到点 A', B', C', D'. 在欧氏平面上关于交比的基本定理是

定理 2.1 一条直线上四个不同点的交比在射影和截影下保持不变.

为了证明这个定理，从 P 向 r 引垂线交 r 于 H，那么不考虑符号，我们有

$$(A, B, C, D)=\frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}}=\frac{\dfrac{\frac{1}{2}HP\cdot AC}{\frac{1}{2}HP\cdot BC}}{\dfrac{\frac{1}{2}HP\cdot AD}{\frac{1}{2}HP\cdot BD}}=\frac{\dfrac{\triangle APC\text{ 的面积}}{\triangle BPC\text{ 的面积}}}{\dfrac{\triangle APD\text{ 的面积}}{\triangle BPD\text{ 的面积}}}$$

$$=\frac{\dfrac{\frac{1}{2}AP\cdot CP\sin\angle APC}{\frac{1}{2}BP\cdot CP\sin\angle BPC}}{\dfrac{\frac{1}{2}AP\cdot DP\sin\angle APD}{\frac{1}{2}BP\cdot DP\sin\angle BPD}}=\frac{\dfrac{\sin\angle APC}{\sin\angle BPC}}{\dfrac{\sin\angle APD}{\sin\angle BPD}}.$$

实际上，我们证明了

$$(A, B, C, D)=\frac{AC}{BC}\,\frac{BD}{AD}=\pm\frac{\sin\angle APC}{\sin\angle BPC}\cdot\frac{\sin\angle BPD}{\sin\angle APD}. \tag{6}$$

现在，从 P 向直线 s 作垂线交 s 于 K，重复以上的讨论我们得到：

$$(A', B', C', D')=\frac{A'C'}{B'C'}\cdot\frac{B'D'}{A'D'}=\pm\frac{\sin\angle APC}{\sin\angle BPC}\cdot\frac{\sin\angle BPD}{\sin\angle APD}. \tag{7}$$

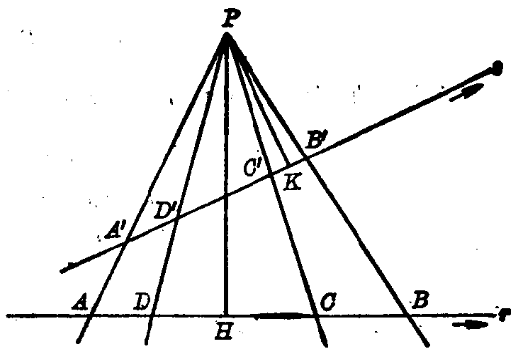


图 2-2

当各点的标号如图 2-2 所示时，为了完成证明，我们必须证明(6)和(7)右边的符号相同.

选定一个绕 P 的方向使 $\angle APC$(由 AP 绕 P 反时针方向旋转到与 CP 重合所成之角)取正值，那么，$\angle APD$ 也取正值，而 $\angle BPC$ 和 $\angle BPD$(由 BP 绕 P 顺时针方向旋转所得)

取负值. 这样我们发现 $\frac{AC}{BC}$ 与 $\frac{\sin\angle APC}{\sin\angle BPC}$, $\frac{BD}{AD}$ 与 $\frac{\sin\angle BPD}{\sin\angle APD}$ 有相同的符号, 而且这种同号性与 p 上的方向和绕 P 的方向都无关. 这样, (6) 和 (7) 的右边都是正号, 于是有

$$(A, B, C, D)=(A', B', C', D').$$

在习题 2.11 中, 我们将证明定理 2.1 与点的标号顺序无关.

对偶地, 我们考虑在 P 点上四条不同的直线 a, b, c, d, 设不在 P 上的任意直线 r 和 s 分别截这些直线于点集 A, B, C, D 和 A', B', C', D'. 根据定理 2.1, 有

$$(A, B, C, D)=(A', B', C', D').$$

这启发我们作出下面的定义(见图 2-3):

在点 P 上的任意顺序的四条直线 a, b, c, d 的交比就是这些直线被不在 P 上的任意直线所截得的同样顺序的四点 A, B, C, D 的交比, 即

$$(a, b, c, d)=(A, B, C, D)$$
$$(c, a, d, b)=(C, A, D, B)$$

等等.

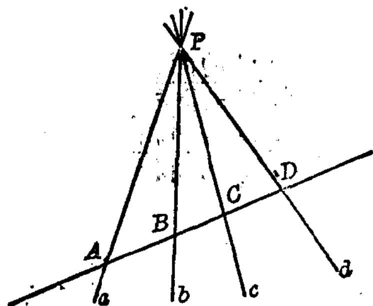


图 2-3

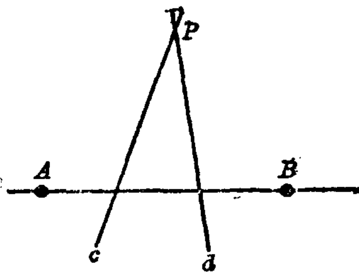


图 2-4

最后(见图 2-4), 设 A、B 是任意两个不同点, c, d 是在任一点 $P\neq A, B$ 上的任意不同直线, 它们都不在 A 或 B 上. 设 $AB\cdot c=C$, $AB\cdot d=D$. 我们定义元素 A, B, c, d 中的任意两个关于其它两个的交比为四点 A, B, C, D 的相应交比. 例如,

$$(A, B, c, d)=(A, B, C, D),$$
$$(c, A, B, d)=(C, A, B, D)$$

等等. 类似地, 设 $PA=a$, $PB=b$, 我们定义

$$(A, B, c, d)=(a, b, c, d),$$
$$(c, B, d, A)=(c, b, d, a)$$

等等.

4. 二十四种交比

我们重申我们现在处理的是欧氏平面. 在图 2-1 中, $(A, B; C, D)<0$, 而 $(A, C; B, D)>0$, 显然四点 (四条直线或两点和两条直线) 的交比的值依赖于把这些元素记入 $(-, -; -, -)$ 的顺序. 与四个不同字母的 24 种不同排列对应, 有同样数目的交比, 然而, 不同交比的数目不是 24 个. 因为, 注意到符号, 我们发现

$$\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{BD}{BC}\cdot\frac{AC}{AD}=\frac{DB}{DA}\cdot\frac{CA}{CB}=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{DB}{DA}.$$

因此 $(A, B, C, D)=(B, A, D, C)=(D, C, B, A)=(C, D, A, B)$.

于是有

定理 2.2 当四个元素中的任意两个与其它两个同时交换时，交比的值保持不变.

因此，24 个交比 4 个一组分为 6 个集合. 设 $(A, B, C, D)=\lambda$, 这些集合连同它们的数值是

$$\begin{aligned}
&(a)\ (A, B, C, D)=(B, A, D, C)=(D, C, B, A)=(C, D, A, B)=\lambda.\\
&(b)\ (A, B, C, D)=(B, A, C, D)=(C, D, B, A)=(D, C, A, B)=\frac{1}{\lambda}.\\
&(c)\ (A, C, B, D)=(C, A, D, B)=(D, B, C, A)=(B, D, A, C)=1-\lambda. \qquad (8)\\
&(d)\ (A, C, D, B)=(C, A, B, D)=(B, D, C, A)=(D, B, A, C)=\frac{1}{1-\lambda}.\\
&(e)\ (A, D, C, B)=(D, A, B, C)=(B, C, D, A)=(C, B, A, D)=\frac{\lambda}{\lambda-1}.\\
&(f)\ (A, D, B, C)=(D, A, C, B)=(C, B, D, A)=(B, C, A, D)=\frac{\lambda-1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

为了推出这个表，考虑图 2-1 中直线 p 上的四个不同点 A, B, C, D, 设 $(A, B, C, D)=\lambda$, 那么 $(A, B, D, C)=\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BC}{AC}=1\Big/\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{1}{\lambda}$, 于是，由定理 2.2 推出 (8)(b). 我们证明了：

定理 2.3 在任一交比中，交换它的一对元素所得交比的值是原来交比的值的倒数.

再考虑 $(A, C, B, D)=\frac{AB}{CB}\cdot\frac{CD}{AD}$, 由 (3) 有 $\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}+\frac{AC\cdot DB}{AD\cdot CB}=1$, 从而 $(A, C, B, D)+(A, B, C, D)=1$, $(A, C, B, D)=1-\lambda$. 于是，由定理 2.2 推出 (8)(c). 我们证明了：

定理 2.4 在任一交比中，交换它的内项（中间两个元素）或外项（外面两个元素）所得交比的值是原交比的值的算术余数.

表的剩余部分容易推出，我们留给读者去完成.

我们现在有：

定理 2.5 如果已知四点的任一交比的值，则所有交比的值都已确定.

例 2.1 设 $(A, B, C, D)=3$, 那么，$(A, B, D, C)=\frac{1}{3}$, $(A, C, B, D)=-2$, $(A, C, D, B)=-\frac{1}{2}$, $(A, D, C, B)=\frac{3}{2}$, $(A, D, B, C)=\frac{2}{3}$.

根据定理 2.2，所有 24 个交比的值都知道了.

假设 A, B, C, D 中某两个点重合，有三种情况：

(i) 当 A 和 B 重合时，有 $(A, A, C, D)=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{AD}{AC}=1$, 当 C 和 D 重合时，情况是一样的.

(ii) 当 A 和 C 重合时，有 $(A, B, A, D)=\frac{AA}{AD}\cdot\frac{BD}{BA}=0$, 当 B 和 D 重合时，情况是一样的.

(iii) 当 A 和 D 重合时，$(A, B, C, A)=\frac{AC}{AA}\cdot\frac{BA}{BC}$，交比没有定义，我们约定$(A, B, C, A)=(A, B, B, D)=\infty$，它表示当 D 趋于 A(或 C 趋于 B)时，(A, B, C, D)的数值可无限增大．反过来不难证明：如果交比取值是 0, 1, ∞ 中的一个，那么必有某两点重合．

下面假设 A, B, C 三点固定，而当 D 点描出直线 p 时．当点的位置如图 2-1 所示时，$(A, B, C, D)<0$，当 D 向右移动时，AC/BC 的值保持不变，而 BD/AD 的值恒正且趋向于 1，因此，(A, B, C, D)趋向于 AC/BC．当 D 向左移动时，BD/AD 恒正而递减．如上所述，当 D 与 B 重合时，$(A, B, C, D)=0$．当 D 继续从 B 移动到 C 时，(A, B, C, D)的值从 0 增加到 1．当 D 与 C 重合时，(A, B, C, D)取值 1．当 D 继续从 C 移动到 A 时，(A, B, C, D)的值从 1 增加到 ∞．当 D 与 A 重合时，(A, B, C, D)的值用 ∞ 表示．当 D 从 A 向左移动时，(A, B, C, D)取负值并递增地趋于 AC/BC．

最后，假设 6 个交比的值中有某两个相等，存在两种情况：

第一种情况，$\lambda=\frac{1}{\lambda}$，这时 $\lambda^2=1$，$\lambda=\pm1$．上面已经注意到 $\lambda=1$ 时，四点中有两点重合，6个交比的值变为仅有三个，即 0, 1, ∞．当 $\lambda=-1$ 时，6 个交比的值再次缩减为三个，即 -1, $\frac{1}{2}$ 和 2．

第二种情况，$\lambda=1/(1-\lambda)$，这时 λ 是方程 $\lambda^2-\lambda+1=0$ 的一个根，交比的数值是虚数．这种情况，这里不考虑．

5．交比是一个射影性质

现在考虑拓广平面 (π, p_∞)，设 A, B, C, D 是任一拓广直线(r, R_∞) 上的任意四个不同的普通点(见图 2-5)，P 是不在 r 上的任一普通点，设(r', R'_∞)是另一条不在 P 上的拓广直线，它应这样选取，使得当以 P 向(r'_1, R'_∞)投影时，A, B, C, D 的对应点 A', B', C', D' 是普通点．在这个射影下，用 R' 表示 R_∞ 的对应点，用 R 表示其对应点 R'_∞ 的对应点．由定理 2.1 我们有

$$(A, B, C, D)=(A', B', C', D'). \tag{9}$$

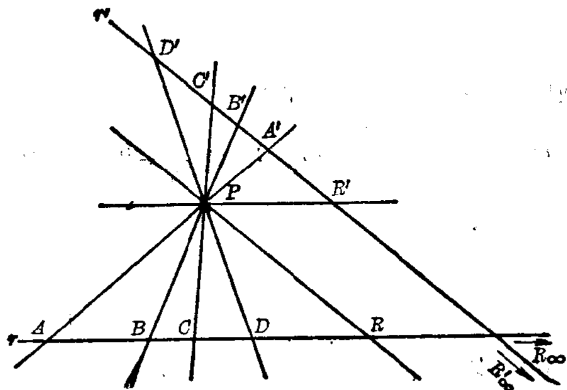


图 2-5

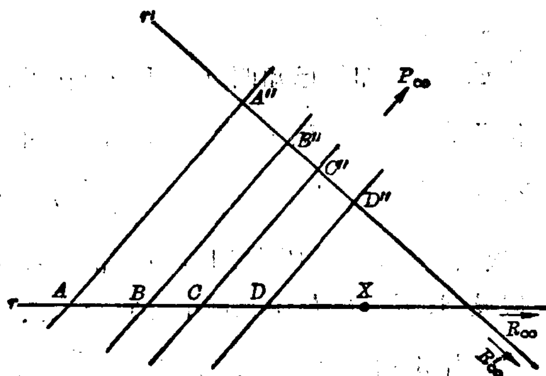


图 2-6

其次，直线(r, R_∞)，(r', R'_∞)和点 A, B, C, D 仍如前设(见图 2-6)，但射影中心却是不同于 R_∞ 和 R'_∞ 的理想点 P_∞，(r, R_∞)上点 A, B, C, D 的投射线是平行线，它们交(r', R'_∞)于不同的普通点 A'', B'', C'', D''．容易证明：

$$(A, B; C, D)=(A'', B''; C'', D''). \tag{9'}$$

我们现在回到图2-5并考虑(r, R_∞)上三个普通点和一个理想点A, B, C, R_∞的情况，它们在(r', R'_∞)上的对应点是普通点A', B', C', R'，这时(R', A', B', C')有定义．但(R_∞, A, B, C)却没有定义．因为我们可自由地定义(R_∞, A, B, C)使之最适合我们的目的，我们令

$$(R_\infty, A, B, C)=(R', A', B', C'), \tag{9''}$$

即我们定义：

在任一拓广直线上三个普通点和一个理想点的交比是它们的对应点按相同顺序的交比，这些对应点是通过到另一拓广直线上的任一射影所得到的，只要这些对应点是普通点．

然而，当射影中心是图2-6的理想点P_∞时，对应点$A'', B'', C'', R''_\infty$由$(r, R'_\infty)$的三个普通点和一个理想点组成．在这种情况下，$(R_\infty, A; B, C)$和$(R'_\infty, A''; B'', C'')$都没有定义．考虑$(X, A, B, C)=\frac{XB}{XC}\cdot\frac{AC}{AB}$，这里$X$是这样一个点，它使得$B, X$分隔$A, C$．当$X\to R_\infty$时，$\frac{XB}{XC}\to 1$，这启发我们定义$(R_\infty, A, B, C)=AC/AB$（见习题2.13），于是$(R'_\infty, A''; B'', C'')=A''C''/A''B''$．因为$AC/AB=A''C''/A''B''$（证明这一点），我们有

$$(R_\infty, A, B, C)=(R'_\infty, A''; B'', C''). \tag{9'''}$$

我们在这里所做的是拓广交比的概念，以便当在(r, R_∞)上的四个点中，有三个是普通点，另一个是理想点时，(9)也成立．

现在我们可以叙述如下：对于在拓广平面上的两条不同拓广直线的点之间的任意透视来说，一条直线上的任意四点的交比等于他们在另一直线上的对应点在相同顺序下的交比．

由于射影是一系列透视，我们还有：

对于在拓广平面上的两条不同拓广直线的点之间的任意射影来说，一条直线上的任意四点的交比等于它们在另一条直线上的对应点在相同顺序下的交比．

我们这样定义的交比使(9)对于拓广平面内共线的任意四点都成立，还剩下最后一种情况，即四个点是p_∞上的不同的理想点$A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$，显然这时射影中心和理想点的对应点都是平面上的普通点．假设：

$$p_\infty(A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty, \cdots)\overset{P_1}{\barwedge} p_1'(A', B', C', D', \cdots)$$

和
$$p_\infty(A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty, \cdots)\overset{P_2}{\barwedge} p_2(A'', B'', C'', D'', \cdots)$$

那么
$$p_1(A', B', C', D', \cdots)\barwedge p_2(A'', B'', C'', D'', \cdots).$$

我们定义：

四个不同的理想点的交比就是能够通过射影而得到的任意四个共线的普通点的交比．

在把交比概念扩充到拓广平面时，我们做了必要的附加定义以使下述定理成立．

定理2.6　如果在拓广平面上的同一条或不同的两条拓广直线的点外（在同一点或不同的两点上的线束间）建立了一个射影，第一个列中的任意四个元素的交比等于它们在第二个列中的对应元素（取同样顺序）的交比．

这里产生一个问题，如果A, B, C, D是一条直线上的四个不同点，A', B', C', D'是同一直线或另一直线上的四个不同点，并且$(A, B; C, D)=(A', B'; C', D')$，必然推出形如：

$$(A, B, C, D, \cdots) \barwedge (A', B', C', D', \cdots)$$

的射影存在吗？或者采用第一章的简写符号，必然推出 $(A, B, C, D) \barwedge (A', B', C', D')$ 吗？在习题 2.2 中，我们将证明，回答是肯定的。

对于射影平面，我们现在可以叙述如下：

定理 2.7 如果 A, B, C, D 是四个不同的共线点，A', B', C', D' 是另外四个不同的共线点，这两组点在同一条或不同的直线上，那么，由

$$(A, B, C, D) \barwedge (A', B', C', D'),$$

可推出 $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$，反过来，由

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$$

可推出 $(A, B, C, D) \barwedge (A', B', C', D')$.

根据定理 1.3，至少存在一个射影使得任意三个给定的共线点 A, B, C 分别变到另外三个给定的共线点 A', B', C'. 设 X 是与第一组三个点共线的另一点，用 X' 表示 X 在这个射影下的对应点，那么，由定理 2.7 $(A, B, C, X) = (A', B', C', X')$ 并且(注意习题 2.3 中的问号)，有

定理 2.8 (*基本定理*) 在射影平面的同一直线或不同直线(同一点或不同点)上给定两组三个不同的共线点(两组三条不同的共点线)，存在唯一一个射影使得第一组三点 A, B, C (线 a, b, c) 分别变到第二组三点 A', B', C' (线 a', b', c').

注意：在谈到在不同直线 p_1 和 p_2 上的两组三个不同点确定唯一一个射影时，我们不考虑产生这个射影的各种透视序列，这个定理的关键是：如果 X 是 p_1 上的任意其它的一点，那么，与使 A, B, C 分别变到 A', B', C' 的透视序列无关，X 的对应点总是 p_2 上的同一点 X'，因此我们有：

定理 2.9 若在非迭置点列射影 $p_1 \barwedge p_2$ $(P_1 \barwedge P_2)$ 中，$p_1 \neq p_2$ $(P_1 \neq P_2)$，若 $P = p_1 \cdot p_2$ $(p = P_1 \cdot P_2)$ 是自对应元素，则此射影是透视(证明见习题 2.4).

定理 2.9 的一个重要应用是证明三点共线或三线共点，作为一个例子，见习题 2.5.

定理 2.7 的其他推论是：

定理 2.10 如果 A, B, C, D 是一条直线上的任意四个不同的点，那么 $(A, B, C, D) \barwedge (A, B, D, C) \barwedge (D, C, B, A) \barwedge (C, D, A, B)$.

定理 2.11 分隔是四个不同的共线点(四条不同的共点线)的射影性质.

考虑到交比是依赖线段长度来定义的这一事实，有理由对此处所定义的交比和运用交比所导出的定理提出异议. 我们将在可行的时候给出这些较重要的定理不依赖于交比的证明，在以后各章中，常常用到定理 2.10，我们指出早先在第一章的习题 1.5, 1.6, 1.22 中已经给出了它的一个证明.

§2.2 问题及其解

2.1 A, B, C, D 是四个不同的共线点，证明：$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$.

证明. 我们反复利用 §2.1 中的(2)式来证明. 对于 A, B, C 三点，我们有 $AC + CB + BA = 0$.

由此推出 $$AC = AB + BC.$$

同样对于 A, B, D 三点，有 $AB=AD+DB$，对于 B, C, D 三点有：

$$CB=CD+DB. \text{ 则有}$$

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=AB(CD+DB)+BC(DB+AD)=AB\cdot CB+BC\cdot AB=0.$$

2.2 给定拓广平面内同一直线或两条不同直线上的两组四个不同的共线点 A, B, C, D 和 A', B', C', D'，证明：由 $(A, B; C, D)=(A', B'; C', D')$ 可推得 $(A, B, C, D)\barwedge(A', B', C', D')$.

证明：由定理 1.3，至少存在一个射影，把 A, B, C, D 分别投影到 A', B', C', D'. 假设这个射影把 D 投影到 D''，由定理 2.6 $(A, B, C, D)=(A', B', C', D'')$.

但 $$(A, B, C, D)=(A', B', C', D'),$$
所以 $$(A', B', C', D')=(A', B', C', D''),$$
于是 $$(B', A', D')=(B', A', D''),$$
所以 $$D'=D''.$$

2.3 给定拓广平面内一条拓广直线上的三个不同普通点 A, B, C 和一个实数 λ，在此直线上作出点 X，使得 $(A, B, C, X)=\lambda$.

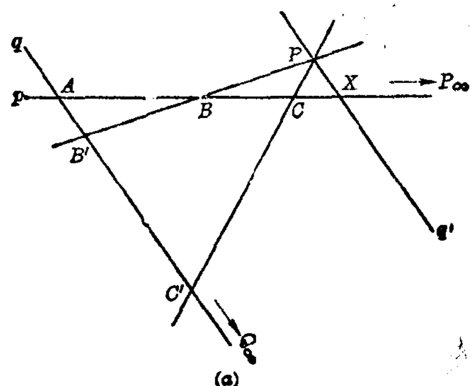
解：由 $(A, B, C, X)=\dfrac{AC}{BC}\cdot\dfrac{BX}{AX}=\lambda$，显然，当 $\lambda=0$ 时，$X=B$；当 $\lambda=1$ 时，$X=C$；当 $\lambda=\dfrac{AC}{BC}$ 时，$X=P_\infty$，P_∞ 是与 A, B, C 共线的理想点. 除了 λ 的这些值以外，还有两种情况：

(i) $\lambda>0$，参看图 2-7(a)，过 A 任作一条不同于 $AB=(p, P_\infty)$ 的直线 (q, Q_∞)，取由 A 到 Q_∞ 的方向为此直线的正向，在 (q, Q_∞) 上取两点 B', C'，使得 $\dfrac{AC'}{B'C'}=\lambda$. 令 $P=BB'\cdot CC'$ 过 P 作一直线 $q'/\!/q$，那么，$p\cdot q'=X$ 即为所求之点. 因为，由定理 2.6 有

$$(A, B, C, X)\overset{P}{\barwedge}(A, B', C', Q_\infty)$$

所以，$$(A, B, C, X)=(A, B', C', Q_\infty)=(A, B', C')=\lambda.$$

(ii) 当 $\lambda<0$，参看图 2-7(b)，适当地改变记号，步骤完全与(i)相同，就不再重述. 为什么我们能肯定恰存在一点 X？



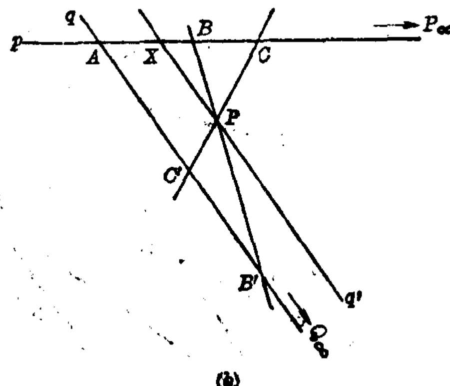


图 2-7

2.4 证明：在任何射影 $p\barwedge p'(P\barwedge P')$ 中，这里 $p\neq p'(P\neq P')$，若 $Q=p\cdot p'(q=PP')$ 是自对应的，则此射影是一个透视.

证明：考察图 2-8，直线 p 和 p' 交于 Q，在 p 上取两个异于 Q 的不同点 A，B. 假定它们射影对应点分别是 A'，B'，使得：

$$p(Q,\ A,\ B,\ \cdots)\barwedge p'(Q,\ A',\ B',\ \cdots).$$

设 $R=AA'\cdot BB'$，则 $p(Q,\ A,\ B,\ \cdots)\overset{R}{\barwedge}p'(Q,\ A',\ B',\ \cdots)$，因此，由基本定理，所给射影一定是这个透视．定理的第二部分可由对偶原则推出．

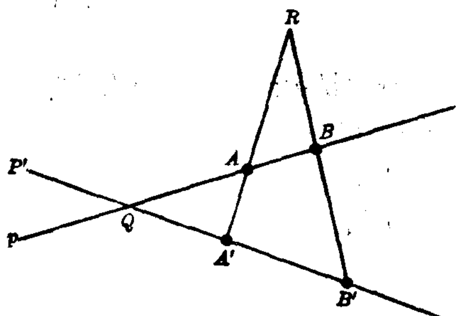


图 2-8

2.5 证明巴普斯定理的平面对偶：在射影平面上，设 a_1，a_2，a_3 是点 R 上的不同直线，b_1，b_2，b_3 是另一点 S 上的不同直线，则直线 $c_1=(a_3\cdot b_2)(a_2\cdot b_3)$，$c_2=(a_1\cdot b_3)(a_3\cdot b_1)$，$c_3=(a_1\cdot b_2)(a\cdot b_1)$ 共点．

证明：在图 2-9 中，设 $c_1\cdot c_2=P$，$RS=p$. 看来 c_3 似乎在 P 上，这正是我们需要证明的．为此，需要两个成透视对应的线束．在这个透视中，比如说 c_1 和 c_2 是对应元素，这个透视还包含这样的直线，它们的交点确定 c_3. 把 c_1 上的点 $A_1=a_2\cdot b_3$ 和 c_2 上的点 $A_2=a_1\cdot b_3$ 作为这两个线束的中心．在 A_1 上，我们需要一条通过 c_3 上一个已知点的直线，在 A_2 上，我们需要一条通过 c_3 上另一个已知点的直线．就取这两条直线为

$$u=(a_1\cdot b_2)(a_2\cdot b_3),\ v=(a_2\cdot b_1)(a_1\cdot b_3).$$

现在

$$A_1(c_1,\ u,\ b_3,\ a_2)\overset{b_2}{\barwedge}R(a_3,\ a_1,\ p,\ a_2),$$

$$A_2(c_2,\ a_1,\ b_3,\ u)\overset{b_1}{\barwedge}R(a_3,\ a_1,\ p,\ a_2),$$

所以

$$A_1(c_1,\ u,\ b_3,\ a_2)\barwedge A_2(c_2,\ a_1,\ b_3,\ v).$$

由于 b_3 是自对应元素，这个射影实际上是透视

$$A_1(c_1,\ u,\ a_2)\barwedge A_2(c_2,\ a_1,\ v).$$

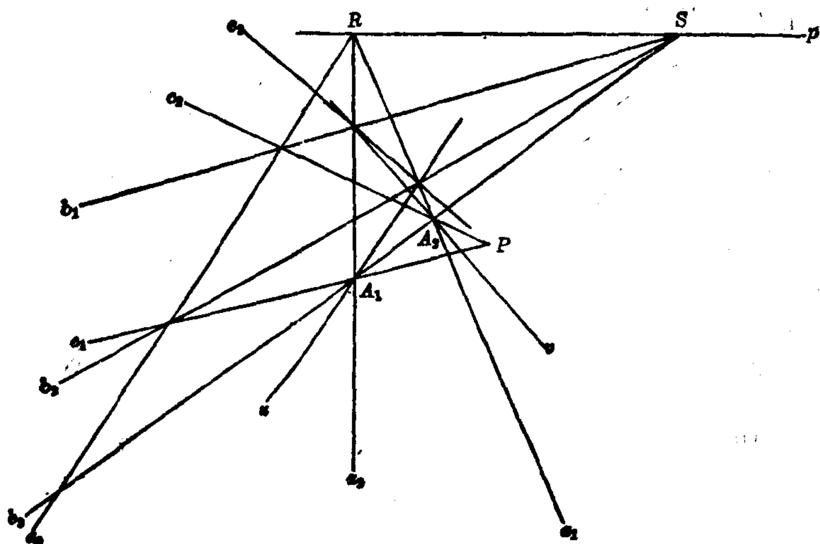


图 2-9

注意：这个透视满足上述要求，即 c_1, c_2 是对应元素，而 $u\cdot a_1$ 和 $a_2\cdot v$ 在 c_3 上，按照定义，$P=c_1\cdot c_2$, $a_1\cdot u=a_1\cdot b_2$, $a_2v=a_2\cdot b_1$ 是共线点，于是 P 在 $(a_1\cdot b_2)(a_2\cdot b_1)=c_3$ 上，所以 c_1, c_2, c_3 共点.

点 P 称为在不同点 R 和 S 上的两个三元线组的巴普斯点.

现在我们可以写出更简洁的证明. 在图 2-9 中，令 $RS=p$, $a_2\cdot b_3=A_1$, $a_1\cdot b_3=A_2$; $(a_1\cdot b_2)(a_2\cdot b_3)=u$, $(a_2\cdot b_1)(a_1\cdot b_3)=v$. 则

$$A_1(c_1,\ u,\ b_3,\ a_2)\overset{b_2}{\barwedge}R(a_3,\ a_1,\ p,\ a_2)\overset{b_1}{\barwedge}A_2(c_2,\ a_1,\ b_3,\ v)$$

所以
$$A_1(c_1,\ u,\ b_3,\ a_2)\barwedge A_2(c_2,\ a_1,\ b_3,\ v).$$

但它是一个透视，即 $A_1(c_1,\ u,\ a_2)\barwedge A_2(c_2,\ a_1,\ v)$. 则有 $(c_1\cdot c_2)\cdot(a_1\cdot u)=a_1\cdot b_2$, $a_2\cdot v=a_2\cdot b_1$ 共线，故 $c_3=(a_1\cdot b_2)\cdot(a_2\cdot b_1)$ 在 $c_1\cdot c_2=P$ 上.

2.6 证明巴普斯定理：在射影平面上，设 A_1, A_2, A_3 是直线 r 上的不同点，B_1, B_2, B_3 是另一直线 s 上的不同点，那末点 $C_1=A_2B_3\cdot A_3B_2$, $C_2=A_1B_3\cdot A_3B_1$, $C_3=A_1B_2\cdot A_2B_1$ 共线.

证明：在图 2-9′ 中，令 $r\cdot s=P$, $A_1B_2\cdot A_2B_3=U$, $A_2B_1\cdot A_1B_3=V$, $C_1C_2=p$, 则

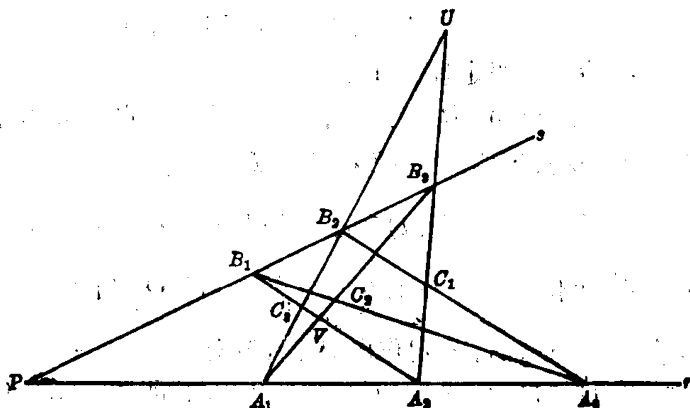


图 2-9′

$$(C_1,\ U,\ B_3,\ A_2)\overset{B_2}{\barwedge}(A_3,\ A_1,\ P,\ A_2)\overset{B_1}{\barwedge}(C_2,\ A_1,\ B_3,\ V),$$

所以
$$(C_1,\ U,\ B_3,\ A_2)\barwedge(C_2,\ A_1,\ B_3,\ V).$$

但它是一个透视，即 $(C_1,\ U,\ A_2)\barwedge(C_2,\ A_1,\ V)$. 那末 C_1C_2, $A_1U=A_1B_2$, $A_2V=A_2B_1$ 共点于 $A_1B_2\cdot A_2B_1=C_3$, 所以点 C_1, C_2, C_3 共线.

直线 $p=C_1C_2C_3$ 称为在不同直线 r 和 s 上的两个三元点组的巴普斯线.

§2.3 补 充 题

2.7 (a) 证明 1. 中的(1)和(2)与 p 的方向无关.

(b) 证明 1. 中的(2)与 C 关于 A, B 的位置无关.

提示：在直线 p 上取三个不同的记号 A, B, C, 有六种不同的取法，每一种都要研究.

2.8 在一直线上有三个不同的点 A, B, C, 证明六个分比的值为 r, $\frac{1}{r}$, $1-r$, $\frac{1}{1-r}$, $\frac{r}{r-1}$, $\frac{r-1}{r}$.

2.9 为什么 $(AB,\ C)$ 不是射影不变量?

2.10 证明：$(ab)+(ba)=0$, $(ac)+(cb)+(ba)=0$, $(ab)\cdot(cd)+(ac)\cdot(db)+(ad)\cdot(bc)=0$.

2.11　在图 2-2 中，把 r 上的点记为(从左到右读)B, C, D, A，把 s 上的点记为 B', C', D', A'，证明 $(A, B, C, D)=(A', B'; C', D')$.

2.12　完成 4. 中的(8)式的证明.

2.13　在图 2-5 中，由相似三角形 $R'PA'$ 和 RPA 可得 $R'A'=\frac{RP\cdot PR'}{AR}$，同样可得 $R'B'=\frac{RP\cdot PR'}{BR}$ 和 $R'C'=\frac{RP\cdot PR'}{CR}$. 证明

$$(R_\infty, A; B, C)=(R', A'; B', C')=\frac{AC}{AB},$$

$$(A, B; C, R_\infty)=(A', B'; C', R')=\frac{AC}{BC}\text{ 等等.}$$

2.14　直线上有五个不同的点 A, B, C, D, E，证明

$$(A, B; C, D)\cdot(A, B; D, E)\cdot(A, B; E, C)=1.$$

2.15　证明定理 2.11.

提示：设 A, B, C, D 是四个共线点，使得 A, C 被 B, D 分隔，若 $(A, B, C, D)\barwedge(A', B', C', D')$，证明：$A', C'$ 被 B', D' 分隔.

2.16　在图 2-7(a)和图 2-7(b)中，$AB=6$ 单位，$AC=10$ 单位，取(a)$\lambda=\frac{5}{4}$ 单位，(b)$\lambda=-\frac{5}{4}$ 单位，对于 p 上的三个点 A, B, C，当 $q\neq p$、X 是 B 上的另一条直线和 $q'\neq p$ 是 C 上另一条直线时，分别作出 X. (核对：(a)$AX=12$ 单位，(b)$AX=4$ 单位.)

2.17　设 A, B, C 是直线 p 上的不同点，$AB=12$ 单位，$AC=8$ 单位，在 p 上作出 X，使得(a)$(A, B, C, X)=-1$，(b)$(A, B, C, X)=2$. (核对：(a)$AX=24$ 单位，(b)$AX=6$ 单位.)

2.18　利用习题 2.17(a)中的点 A, B, C, X，完成下列作图：在 A 上任取两条不同于 p 的直线，在 C 上任取一条异于 p 的直线交 a 于 P、交 b 于 Q；连 B 与 P 交 b 于 R，连 B 与 Q 交 a 于 S，则 RS 在 X 上.

2.19　利用习题 2.17(b)中的 A, B, C, X，完成下列作图：在 A 上任意取两条不同于 p 的直线，在 B 上任意取一条异于 p 的直线，交 a 于 P，交 b 于 Q，连 C, P 交 b 于 R，连 C, Q，交 a 于 S，连 R, S.

2.20　回答第一章 8 中的问题(2)和(3).

第三章　笛沙格双三角形定理

§3.1 基本内容

1. 平面构图

在射影平面内，如果某个图形由 a_{11} 个点和 a_{22} 条直线所组成，并在每一点上有 a_{12} 条直线，在每一直线上有 a_{21} 个点，我们就称这个图形为**平面构图**．这样一个构图，我们用阵列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 来表示，其中有两类型称为完全的．

(a) **完全 n 点形**：由 n 个点(没有三点共线)和由它们决定的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 条直线所构成．它的对偶：

(a′) **完全 n 线形**：由 n 条直线(没有三条共点)和由它们所决定的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个点所构成．

由两个不同点及它们的连线构成的完全 2 点形和由两条不同的直线及它们的交点构成的完全 2 线形没有多大意义．最简单的有价值的完全平面构图是由三个不共线的点和它们的连线所构成的完全三点形以及由三条不共点的直线和它们的交点构成的完全三线形．在每一个这种图形中都有 $a_{11}=3$ 点和 $a_{22}=3$ 条直线以及在每一点上有 $a_{12}=2$ 条直线，在每一条直线上有 $a_{21}=2$ 个点，其表示阵列都是 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$．因此是自对偶的．考虑到这一点，在完全三点形和完全三线形间没有明显的区别．事实上，两者都称为三角形．

除三角形外最简单的完全平面构图是完全四点形和完全四线形．

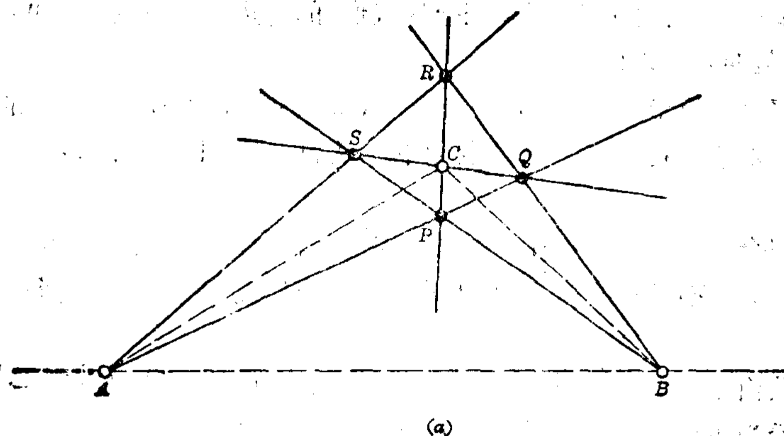


图 3-1(a)

完全四点形由四个不同的点 P, Q, R, S(没有三点共线)以及它们的六条连线所构成(图3-1(a)). 这四个点称为完全四点形的顶点,六条直线称为完全四点形的边.

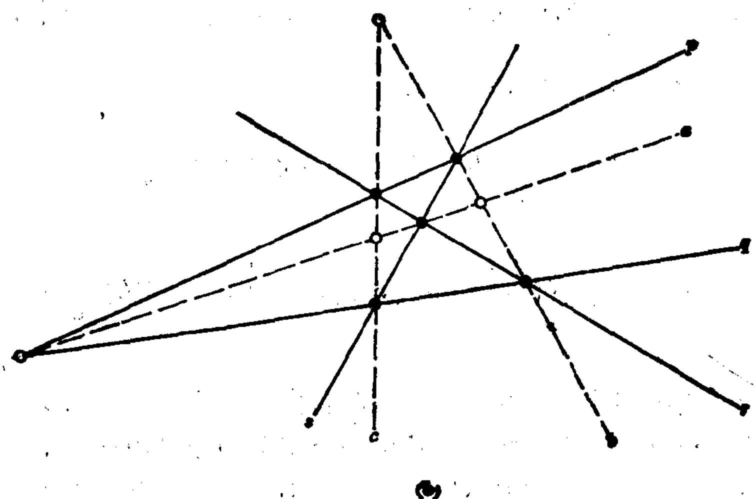
不在同一顶点上的两边称为完全四点形的一组对边, 由三组对边确定的三个附加点 A, B, C 称为完全四点形的对边点. 在图中, 这三点不共线, 它们确定的三角形称为完全四点形的对角三角形.

完全四点形用阵列$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$来代表.

完全四线形由四条不同的直线 p, q, r, s(没有三条共点)以及它们的六个交点所构成(图 3-1(b)). 这四条直线称为完全四线形的边,六个点称为完全四线形的顶点.

不在同一边上的两顶点称为完全四线形的一组对顶点. 由三组对顶点确定的三条附加直线 a, b, c 称为完全四边形的对角线. 在图中,这三条线不共点,它们确定的三角形称为完全四线形的对角三角形.

完全四线形用阵列$\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$来表示.



(b)

图 3-1(b)

此处必须用完全四点形这个术语以区别由四点 P, Q, R, S(没有三点共线)以及顺次连接这四点所得的四条直线 PQ, QR, RS, SP 所构成的简单四点形, 对偶地,存在由四条直线 p, q, r, s(没有三线共点)以及这四条直线顺次相交所得的四点 $p\cdot q$, $q\cdot r$, $r\cdot s$, $s\cdot p$ 所构成的简单四线形.

我们还不能证明,任意完全四点形(完全四线形)的对边点(对角线)不共线(不共点). 然而,我们暂且假定它们成立.

如果在两个完全 n 点形之间, 存在一个一一对应,使得对边的对应顶点的连线共点, 则称这两个完全 n 点形成透视位置. 公共点 P 称为透视中心, 我们说, 这两个 n 点形通过 P 成透视对应.

如果在两个完全 n 线形之间存在一个一一对应使得对应二边交点共线, 则称这两个完全 n 线形成透视位置,交点所在直线 p 称为透视轴. 我们说,这两个 n 线形通过 p 成透视对应.

于是, 两个共面三角形能由一点成透视对应或由一直线成透视对应或既能通过一点又能通过一直线成透视对应. 平面射影几何中一个最著名的定理是:

笛沙格双三角形定理: 如果两个共面三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$,通过点 P 成透视对应,

则有它们也通过某条直线 p 成透视对应；反之，亦成立。

2. 空间构图

在射影空间内，如果一个图形是由 a_{11} 个点 a_{22} 条直线和 a_{33} 个平面所组成，并在每一点上有 a_{12} 条直线和 a_{13} 个平面，在每一条直线上有 a_{21} 个点和 a_{23} 个平面，在每一个平面上有 a_{31} 个点和 a_{32} 条直线，我们就称这个图形为空间构图．这样一个构图用阵列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 来表示．

最简单的完全空间构图是完全四点形和它的空间对偶完全四面形．完全四点形由四个不共面点（顶点）以及由它们所确定的六条直线（边）和四个平面（面）所组成．在每一点上有三条直线和三个平面，在每一直线上有两个点和两个平面，在每一平面上有三个点和三条直线．完全四点形用 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 来表示．我们把完全四面形的定义和描述留作练习．由于完全四点形和完全四面形是自对偶图形，两者都称为四面形．

完全四点形被不过顶点的一个平面所截得的截面用 $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 来表示，它由一个三角形和不在此三角形顶点上的一条直线所组成．现在考虑完全四点形由不在顶点上的两个不同平面所截得的三角形．因为这些三角形间可以建立一个一一对应，使得对应顶点的连线在四面形的一个顶点上，我们说这些三角形通过一点成透视对应．同样，如果在这两个三角形的边之间能建立一个一一对应，使得对应边组的交点共线，我们就说这两个三角形通过一条直线成透视对应．你能找出这样一条直线吗？两个三角形总是既通过一点又通过一条直线成透视对应吗？

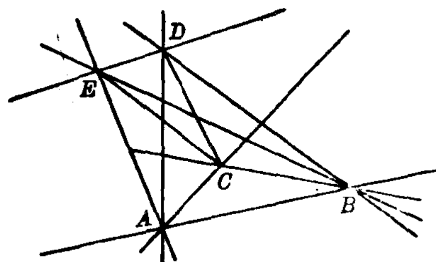


图 3-2

我们特别感兴趣的空间构图是完全五点形（见图 3-2），它由五个点（顶点）A, B, C, D, E（其中没有四点共面且没有三点共线）以及由它们确定的十条直线（边）和十个平面（面）一起构成，用符号表示是：$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$．

3. 笛沙格构图

完全空间五点形 $ABCDE$ 被不过它的任一顶点的平面 π 所截得的截面，如图 3-3 所示，因为五点形由十条直线和十个平面所组成，其中在每一个平面上有三条直线，在每一条直线上有三个平面，所以此截面由十个点和十条直线所组成，其中在每一条直线上有三个点，在每一点上有三条直线．截面的符号表示是 $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$．为了找出这些点和直线，考虑从 D 继而从 E 向三角形 ABC 投影．由 π 截这些投射线得到三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$，把

直线 DE 和 π 的交点记作 P，那么平面 DEA，DEB，DEC 分别交平面 π 于直线 PA_1A_2，PB_1B_2，PC_1C_2，这样说明了七个点和九条直线后，我们可以说，截面的一部分是由通过点 P 成透视对应的两个三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 所组成．剩下的直线是平面 ABC 和平面 π 的交线 p，剩下的点都位于 π 上，A_3 是直线 BC 与 π 的交点，B_3 是直线 AC 与 π 的交点，C_3 是直线 AB 与 π 的交点．平面 DAB 上的直线 A_1B_1，平面 EAB 上的直线 A_2B_2 和直线 AB 交于点 C_3．同样，A_1C_1 与 A_2C_2 交于点 B_3，B_1C_1 和 B_2C_2 交于点 A_3．所以，截面(以笛沙格构图闻名)由通过点 P 也通过直线 p 成透视对应的两个三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 所组成．

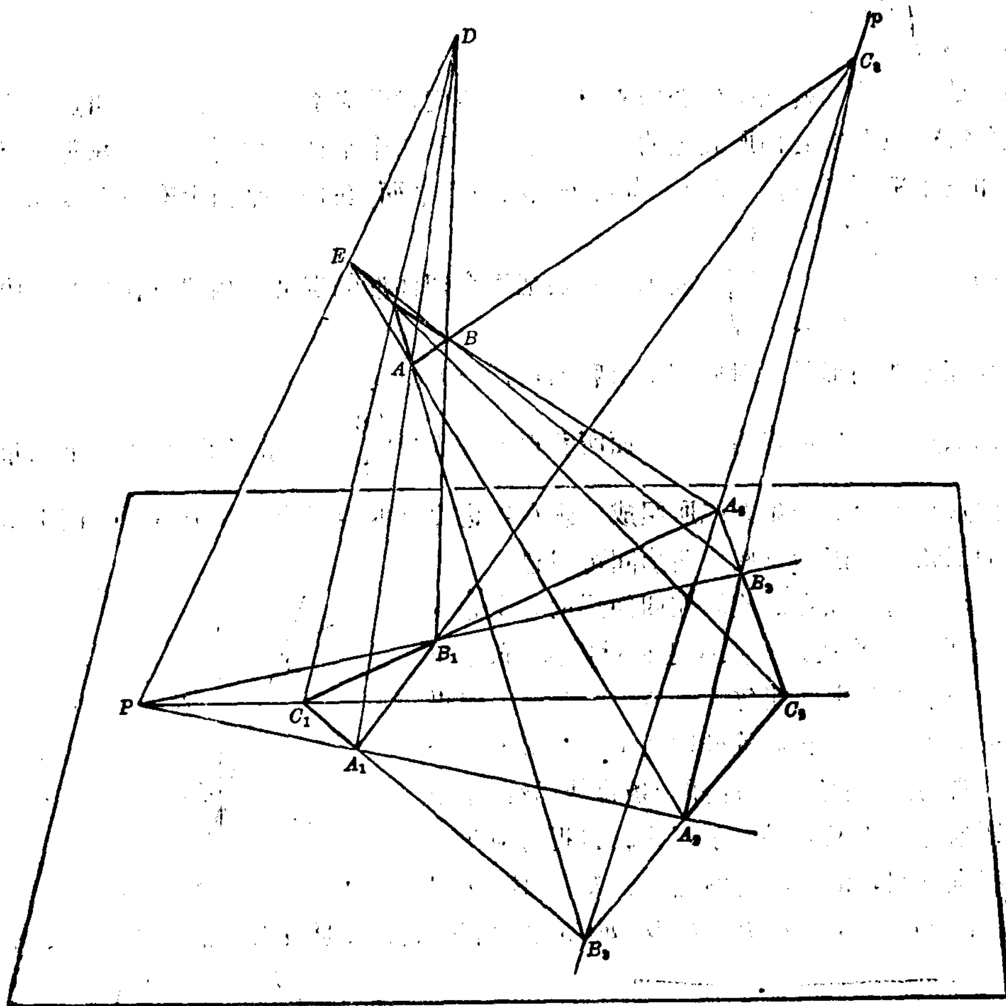


图　3-3

4．笛沙格双三角形定理

在1．中的定理是关于两个共面三角形的．它由两部分——定理及其逆定理——组成．我们发现这两部分成平面对偶．在习题3.1中利用基本定理给出了一个证明．在习题3.34中我们又利用巴普斯定理提供了另一证明．因为基本定理和巴普斯定理的证明都利用了交比，所以我们现在给出第三种证明．然而，为了避免使用交比，我们必须证明更一般的定理：

如果两个三角形(共面或不共面)通过一点成透视对应，则它们也通过一条直线成透视对应；反之亦然．

这个定理包括四个部分——两个定理和它们的逆定理．我们现在顺次写出这几部分，并

给出前三个的证明.

第一部分：如果两个不共面三角形通过一点成透视对应，那么它们也通过一条直线成透视对应.

考虑图 3-3 中通过点 E 成透视对应的不共面三角形 ABC 和 $A_2B_2C_2$. 三角形 ABC 由四面形 $EA_2B_2C_2$ 被一个平面所截得，此平面与四面形 $EA_2B_2C_2$ 的面 $\pi=A_2B_2C_2$ 交于直线 p，因为直线 AB 和 A_2B_2 在这四面形的同一面 EA_2B_2 上，所以它们在一点上；又因为 AB 在平面 ABC 上而 A_2B_2 在平面 π 上，所以这点是直线 p 上的 C_3. 同样，$AC\cdot A_2C_2=B_3$ 和 $BC\cdot B_2C_2=A_3$ 都在 p 上，所以三角形 ABC 和 $A_2B_2C_2$ 通过直线 p 成透视对应. 证毕.

第二部分：如果两个不共面三角形通过一直线成透视对应，那么它们也通过一点成透视对应.

考虑图 3-3 中通过直线 p 成透视对应的不共面三角形 ABC 和 $A_2B_2C_2$，设 $AB\cdot A_2B_2=C_3$，$AC\cdot A_2C_2=B_3$，$BC\cdot B_2C_2=A_3$. 三平面 $ABC_3A_2B_2$，$ACB_3A_2C_2$ 和 $BCA_3B_2C_2$ 有一个公共点，记为 E. 那么，直线 AA_2 由于在其中两个平面上，所以在点 E 上. 同样，直线 BB_2 和 CC_2 都在点 E 上，所以三角形 ABC 和 $A_2B_2C_2$ 通过点 E 成透视对应.

第三部分：如果两共面三角形通过一直线成透视对应，那么它们也通过一点成透视对应.

在图 3-3 中，设平面 π 内的三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 通过直线 p 成透视对应，那么 $A_1B_1\cdot A_2B_2=C_3$，$A_1C_1\cdot A_2C_2=B_3$ 和 $B_1C_1\cdot B_2C_2=A_3$ 都在 p 上，取一平面通过直线 p 且不同于平面 π，在此平面内，取三条直线分别通过 A_3，B_3，C_3 组成三角形 ABC. 现在，由于不共面三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 通过直线 p 成透视对应，它们也通过 D 成透视对应. 同样，不共面三角形 ABC 和 $A_2B_2C_2$ 通过点 E 成透视对应. 因为 AA_1 和 AA_2 在平面 AA_1A_2 上，所以点 D 和 E 也在平面 AA_1A_2 上，同样，点集 B，B_1，B_2，D，E 和 C，C_1，C_2，D，E 分别共面. 设 $A_1A_2\cdot DE=P$；那么，$B_1B_2\cdot DE=C_1C_2\cdot DE=P$ 且三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 通过点 P 成透视对应. 证毕.

第四部分：如果两共面三角形通过一点成透视对应，那么它们也通过一直线成透视对应.

因为第三和第四部分中的三角形都共面，所以第四部分的定理可以作为第三部分的定理的平面对偶来接受而无需证明. 另一方面，第三部分的证明是在射影空间中进行的，因此，这些证明在平面内的对偶不存在. 我们要求读者独立证明它并与习题 3.2 中给出的证明比较.

双三角形定理能用来证明一些有趣的作图和定理. 正如预料的那样，每一个这种证明的步骤都是选定通过一点(一直线)成透视对应的一对三角形，从而两个三角形也通过一直线(一点)成透视对应，尽管其中某些定理既适用于空间又适用于平面. 今后我们的注意力将严格限制在单一平面内. 例如，当给定两直线时，它们就认为是共面的；当给定四个或更多的点时，它们也是共面的；当我们说到定理或作图的对偶时，我们指的是平面对偶.

例 3.1 给定直线 p 和不在 p 上的两个不同点 A 和 B，不能连接 A 和 B(假设由于某种原因不能连接)，找出 p 和 AB 的交点.

在图 3-4 中，已给直线 p 和两点 A，B，假定所需交点是 p 上的某点 X，为了有透视三角形，我们必须以最有可能达到目的的方式添加辅助点和辅助线. 设 q 是不在 A 或 B 上且

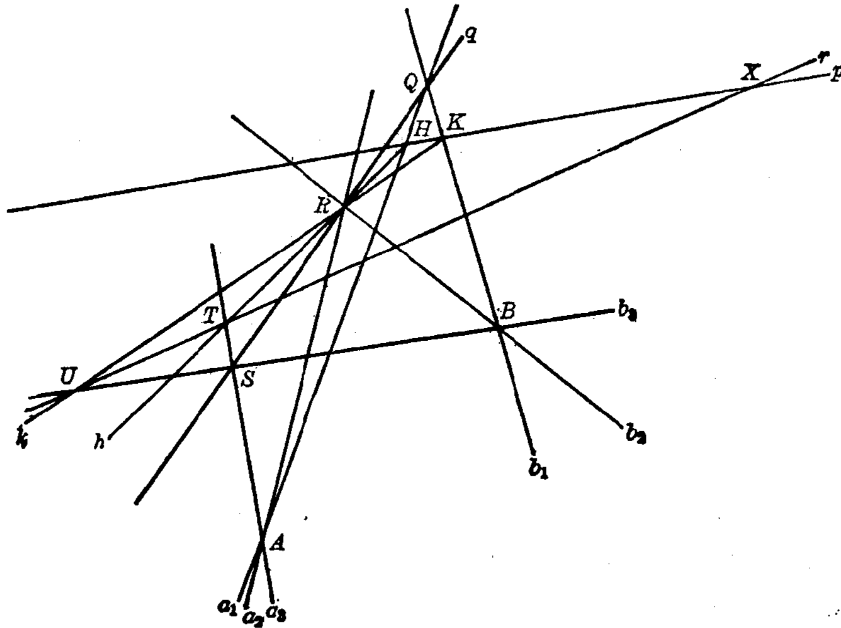


图 3-4

不同于 p 的任一直线，在 q 上任取三个不同点 Q, R, S 并把它们分别与 A 和 B 连接，各得到直线 a_1, a_2, a_3 和 b_1, b_2, b_3. 现在我们寻找两个三角形，由作图它们通过某点成透视对应．如果可能的话，我们希望这条直线就是包含点 X 的直线 AB，由于 a_1 和 a_3 在 A 上，b_1 和 b_3 在 B 上，X 在 p 上，我们考虑三角形 a_1b_1p 和 a_3b_3r，其中 r 尚待确定．设 $p\cdot a_1=H$, $p\cdot b_1=K$；那么三角形 a_1b_1p 就是三角形 QHK．由于 QS 在 R 上，我们试着选取 R 为透视中心．设 $h=HR$, $k=KR$; $T=h\cdot a_3$, $U=k\cdot b_3$. 那么 $TU=r$ 是所求直线．因为三角形 a_1b_1p 和 a_3b_3r（QHK 和 STU）通过点 R 成透视对应，它们也就通过某一直线成透视对应．这条直线在 $A=a_1\cdot a_3$ 和 $B=b_1\cdot b_3$ 上，从而确定了 p 和 AB 的交点 $X=p\cdot r$（也可参看习题 3.3, 3.4）．

5. 连结透视

假设射影 $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\barwedge p_{n+1}(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}, \cdots)$ 是一系列 n 个连结透视

$$\text{(i)}\quad p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P_1}{\barwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{P_2}{\barwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)\overset{P_3}{\barwedge}$$
$$p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots)\overset{P_4}{\barwedge}\cdots\overset{P_n}{\barwedge} p_{n+1}(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}, \cdots)$$

的结果．

在习题 1.4 中已经证明：在不同直线（点）上的两个点列（线束）间的每一射影都能表成最多两个透视的乘积，而在同一直线（点）上的两个点列（线束）间的每一射影都能表示成最多三个透视的乘积．这个定理的另一证明是通过一系列的步骤把 (i) 化简为一个或至少两个透视（当 $p_1\neq p_{n+1}$ 时）或者可化简为一个或至多三个连结透视（当 $p_1=p_{n+1}$ 时），为了得到这样的化简，我们必须知道在什么条件下两个相邻透视能化简为一个透视；在什么条件下三个连续透视能化为两个．下列定理回答了这些问题．

定理 3.1 如果 p_1, p_2, p_3 是在点 O 上的不同直线且 $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P}{\barwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)$，那么在直线 PQ 上存在一点 R，使得

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{R}{\barwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots).$$

(证明见习题 3.5)

推论： 如果 p_1, p_2, p_3 是不同直线或 $p_1=p_3$，p_2' 是在 $p_1\cdot p_2$ 上的任一直线，且

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P}{\barwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots),$$

那么在 PQ 上存在一点 X，使得

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{X}{\barwedge} p_2'(A_2', B_2', C_2', D_2', \cdots)\overset{Q}{\barwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots).$$

定理 3.2 如果直线 p_1, p_2, p_3, p_4 中没有三条共点，且 $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P}{\barwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)\overset{R}{\barwedge} p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots)$，那么存在不同于 p_1 和 p_4 的直线 p_* 和两点 S, T 使得

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{S}{\barwedge} p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots)\overset{T}{\barwedge} p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots).$$

(证明见习题 3.6)

定理 3.3 如果 p_1, p_2, p_3, p_4 是不同的直线，其中 p_1, p_2, p_4 在点 O 上而 p_3 不在 (p_1, p_3, p_4 在点 O 上而 p_2 不在其上)，且

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P}{\barwedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)\overset{R}{\barwedge} p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots),$$

那么存在不同于 p_1 和 p_4 的直线 p_* 和两点 S, T 使得

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{S}{\barwedge} p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots)\overset{T}{\barwedge} p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots).$$

(证明见习题 3.7)

把上述定理反复应用于(i)和由(i)化简的系列，显然：

(ii) 当 $p_1\neq p_{n+1}$ 时，我们有 $p_1\overset{U}{\barwedge} p_{**}\overset{V}{\barwedge} p_{n+1}$；

当 p_1, p_{**}, p_{n+1} 共点时，可进一步化简为 $p_1\overset{W}{\barwedge} p_{n+1}$.

(iii) 当 $p_1=p_{n+1}$ 时，我们有

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{U}{\barwedge} p_{**}(A_{**}, B_{**}, C_{**}, D_{**}, \cdots)\overset{V}{\barwedge} p_{***}(A_{***}, B_{***}, C_{***}, D_{***}, \cdots)\overset{W}{\barwedge} p_1(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}, \cdots).$$

当 p_1, p_{**}, p_{***} 共点时，可进一步化简为 $p_1(A_1, \cdots)\overset{X}{\barwedge} p_{**}\overset{W}{\barwedge} p_1(A_{n+1}, \cdots)$ 或 $p_1(A_1, \cdots)\overset{U}{\barwedge} p_{***}\overset{Y}{\barwedge} p_1(A_{n+1}, \cdots)$.

6. 透视四点形

考虑图 3-5 中的完全四点形 $P_1Q_1R_1S_1$ 和 $P_2Q_2R_2S_2$，交点 $A=P_1Q_1 \cdot P_2Q_2$，$B=P_1S_1 \cdot P_2S_2$，$D=P_1R_1 \cdot P_2R_2$，$G=Q_1R_1 \cdot Q_2R_2$，$F=R_1S_1 \cdot R_2S_2$ 在一条直线 o 上，设 $E=Q_1S_1 \cdot Q_2S_2$。因为三角形 $P_1Q_1R_1$ 和 $P_2Q_2R_2$ 通过直线 $ADG=o$ 成透视，所以它们也通过 P_1P_2，Q_1Q_2 和 R_1R_2 的公共点 O 成透视。同样，三角形 $P_1R_1S_1$ 和 $P_2R_2S_2$ 通过直线 $BDF=o$ 成透视，从而也通过 $O=P_1P_2 \cdot R_1R_2$ 成透视。因此，S_1S_2 在 O 上。最后，三角形 $P_1Q_1S_1$ 和 $P_2Q_2S_2$ 通过 O 成透视，从而也通过直线 $AB=o$ 成透视；所以 E 在 o 上，我们就证明了。

定理 3.4 如果两个完全四点形有五组对应边的交点在一条直线上，那么(i)第六组对应边的交点也在这条直线上。(ii)这两个四点形既通过一点又通过一直线成透视。

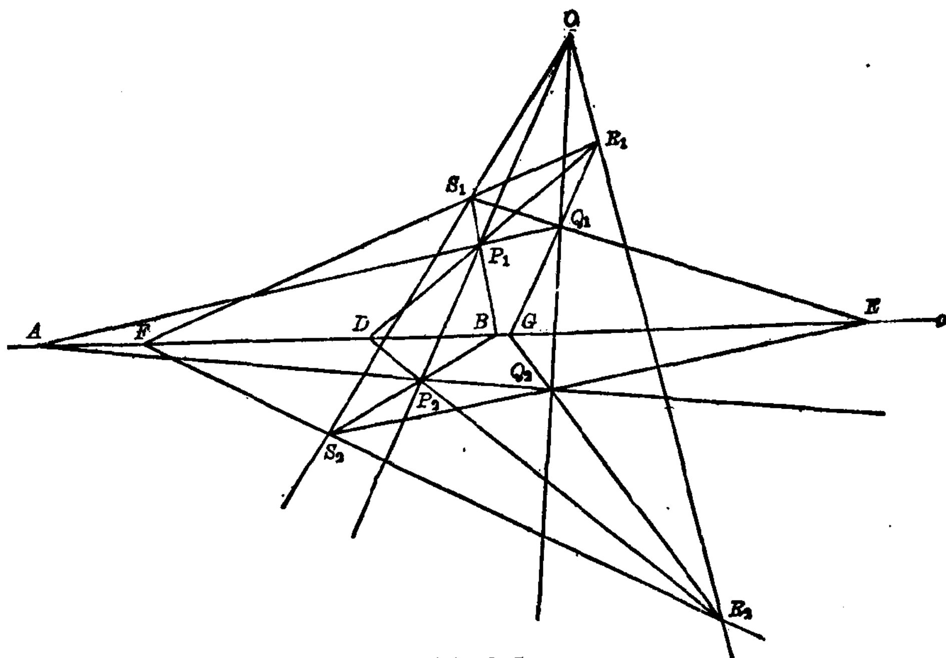


图 3-5

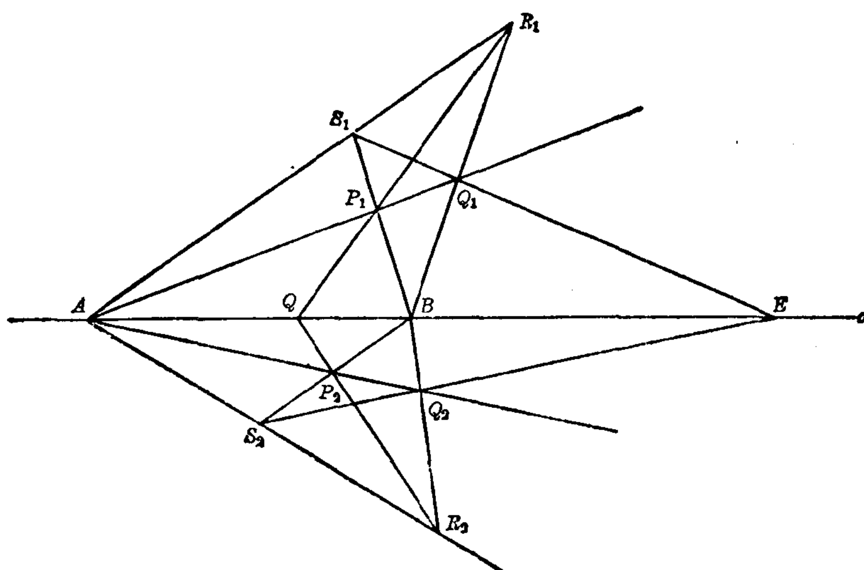


图 3-6

完全四点形与不过顶点的某一直线相交所得的六个交点的集合称为*四点形的点集*. 有三种情况: (a)六个点互不相同(如图 3-5); (b)有两个点 A 和 F(B 和 G)重合, 这时直线 o 在对边点 A(B)上; (c)两对点 A, F 和 B, G 分别重合. 这时直线 o 是四点形的对角三角形的边(我们关于完全四点形的对边点的假定不共线,排除了六点进一步重合的可能性).

对于情况(c),定理 3.4 可以重新叙述如下:

定理 3.5 如果两个完全四点形的对角三角形有一边公共, 且第五组对应边的交点在这条直线上,则剩下的一对对应边的交点也在这条直线上.

7. 四点形的点集

我们回到图 3-5. 考虑由完全四点形 $P_1Q_1R_1S_1$ 所定义的在 o 上的四点形的点集. 我们注意到这点集中的点的自然配对——A和F, B和G, D和E——因为在每一对这种点上的四点形的边还在某一对边点上. 这个点集还可以用四种方式分为两个三元点组, 使得在一个三元点组上的四点形的边有相同顶点,而在另一个三元点组上的边组成一个三角形. 例如, 在三点组 A, D, B 上的四点形的边都在 P_1 上(我们把 A, D, B 称为*一点的三元点组*), 而在三点组 F, E, G 上的边组成一个三角形 $Q_1R_1S_1$(我们把 F, E, G 称为*三角形的三元点组*). 这个四点形点集记作 $Q(A, D, B; F, E, G)$, 也就是记作 Q(一点三元点组, 三角形三元点组). 在这个符号里,三元点组的点的放置顺序无关紧要; 然而,我们约定一旦三元点组的点放置好了,那么三角形三元点组的顺序应按照上面提到的配对来建立. 例如,我们可以写 $Q(A, B, D; F, G, E)$而不能写$Q(A, B, D; E, F, G)$.

如果四点形点集退化成五个不同点(比如说 A 和 F 重合), 我们记作 $Q(A, D, B; A, E, G)$; 如果四点形点集退化成仅有四个不同点(A 和 F, B 和 G 分别重合), 我们记作 $Q(A, D, B; A, E, B)$. 在下一章中我们将详细研究后一种情况, 在那里将引进更有用的符号.

§3.2 问题及其解

3.1 用基本定理证明: 如果两个共面三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 通过一点 P 成透视,那末它们也通过某条直线 p 成透视.

证明: 设 $A_1B_1=c_1$, $A_2B_2=c_2$, $A_3B_3=c_3$, 由题设 c_1, c_2, c_3 交于 P, 设 $A_1A_2=a_3$, $A_1A_3=a^2$, $A_2A_3=a_1$; $B_1B_2=b_3$, $B_1B_3=b_2$, $B_2B_3=b_1$; $a_1\cdot b_1=C_1$, $a_2\cdot b_2=C_2$, $a_3\cdot b_3=C_3$; $C_1C_3=p$, 我们来证明 C_2 在 p 上.

设 $A_2C_2=d$ 和 $B_2C_2=e$, 则有

$A_2(a_1, a_3, c_2, d)\overset{a_2}{\barwedge}P(c_3, c_1, c_2, PC_2)\overset{b_2}{\barwedge}B_2(b_1, b_3, c_2, e)$, 且 $A_2(a_1, a_3, c_2, d)\barwedge B_2(b_1, b_3, c_2, e)$. 这个射影是一个透视(为什么?), 透视轴在 $a_1\cdot b_1=C_1$, $a_3\cdot b_3=C_3$ 和 $d\cdot e=C_2$ 上, 所以 $a_2\cdot b_2=C_2$ 在 $p=C_1C_3$ 上.

3.2 不用基本定理证明: 如果两个共面三角形通过一点成透视, 那么它们也通过一条直线成透视.

证明: 参看图 3-3, 设平面 π 内的三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 通过点 P 成透视, 令 $C_3=$

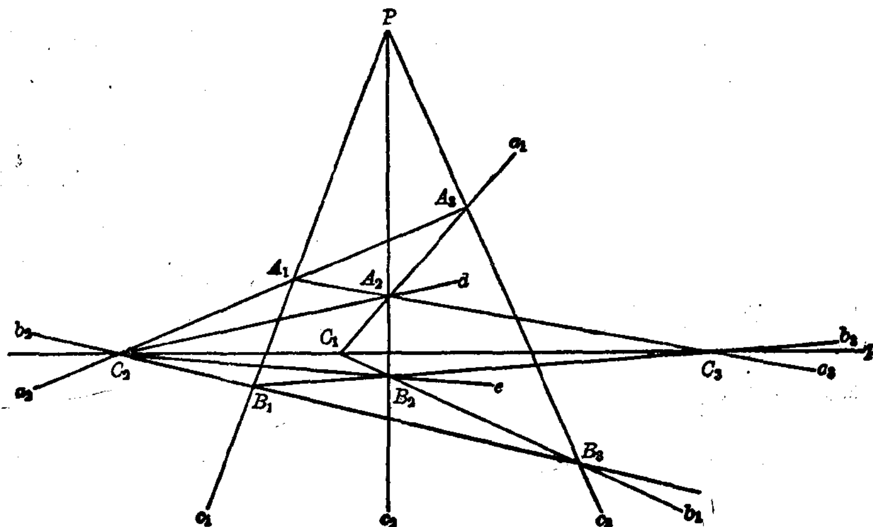


图　3-7

$A_1B_1 \cdot A_2B_2$, $B_3 = A_1C_1 \cdot A_2C_2$ 和 $A_3 = B_1C_1 \cdot B_2C_2$.

在 P 上任取一条不在 π 上的直线，在这条直线上取不同点 D 和 E. 在平面 DEA_1A_2 内，设 $A = DA_1 \cdot EA_2$，在平面 DEB_1B_2 内，设 $B = DB_1 \cdot EB_2$；在平面 DEC_1C_2 内，设 $C = DC_1 \cdot EC_2$，根据作图，三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 通过 D 成透视，因而也通过它们所在平面的交线 p 成透视．同样，三角形 ABC 和 $A_2B_2C_2$ 通过 E 成透视，因而也通过 p 成透视．又 $AB \cdot A_1B_1$ 和 $AB \cdot A_2B_2$ 都在 p 上，所以它们是同一点 C_3，同理 B_3 和 A_3 也都在 p 上．证毕．

3.3　叙述并证明 4．中例 3.1 的对偶．

给定点 P 和不在 P 上的两条不同直线 a 和 b，不使 a 和 b 相交(假定由于某种原因这不可能得交点)找出 P 和 a 与 b 的交点的连线．

证明：在图 3-8 中，设 Q 是不在 a 或 b 上且不同于 P 的任一点．在 Q 上取不同的直线 q, r, s 和 a 及 b 分别相交得到点 A_1, A_2, A_3 及 B_1, B_2, B_3. 设 $h = PA_1$, $k = PB_1$; $H = h \cdot r$, $K = k \cdot r$, $t = A_3H$, $u = B_3K$, $R = t \cdot u$, $x = PR$. 我们断言 x 就是所求的直线．

为了证明这一点，考虑三角形 A_1B_1P 和 A_3B_3R. 因为它们通过直线 r 成透视，所以它们也通过某一点成透视．现在这点在 $a = A_1A_3$, $b = B_1B_3$ 和 $x = PR$ 上．于是 $x = PR$ 是所求的直线．

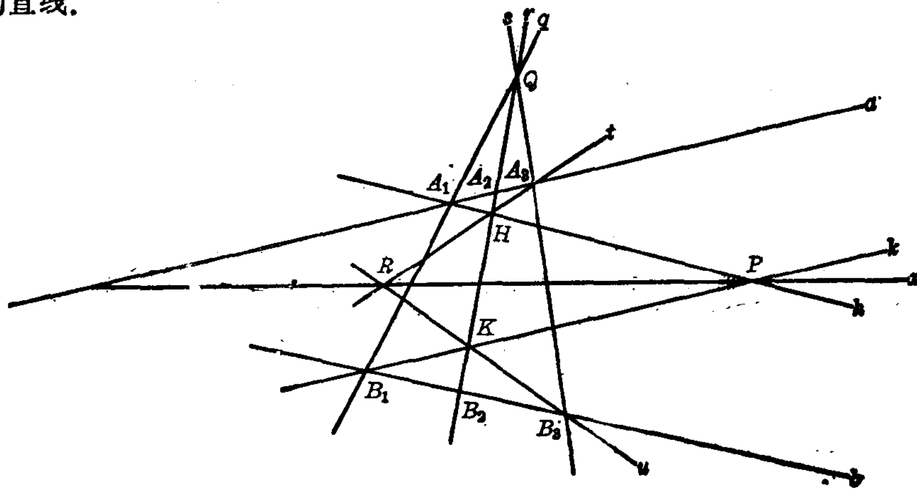


图　3-8

3.4 证明巴普斯定理的特殊情况：如果 A_1, A_2, A_3 是直线 r 上的不同点，B_1, B_2, B_3 是另一直线 s 上的不同点，且 $c_1=A_1B_1$, $c_2=A_2B_2$, $c_3=A_3B_3$ 在点 O 上．那么点 $C_1=A_2B_3\cdot A_3B_2$, $C_2=A_1B_3\cdot A_3B_1$, $C_3=A_1B_2\cdot A_2B_1$ 在与 r 和 s 共点的某条直线上．

证明：参看图 3-9，设 $r\cdot s=P$，由于三角形 $C_1A_2B_2$ 和 $C_2A_1B_1$ 通过直线 OA_3B_3 成透视(检验)，所以它们通过 P 成透视，因而 C_1, C_2, P 共线．同样，由于三角形 $C_1A_3B_3$ 和 $C_3A_1B_1$ 通过直线 OA_2B_2 成透视，所以它们也通过 P 成透视，因而 C_1, C_3, P 共线，所以 C_1, C_2, C_3, P 共线．证毕．

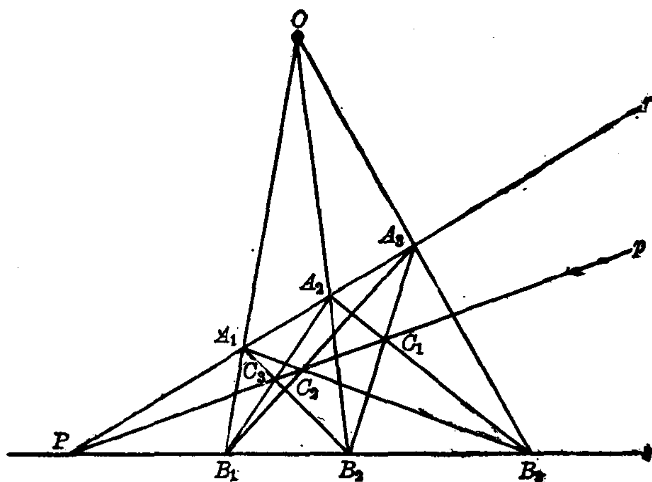


图 3-9

3.5 证明：如果 p_1, p_2, p_3 是点 O 上三条不同直线，且 $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P}{\barwedge}p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge}p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)$，则在 PQ 上存在一点 R，使得：

(a) $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{R}{\barwedge}p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)$.

证明：参看图 3-10，由于三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 通过点 O 成透视，所以它们也通过直线 PQ 成透视，点 $R=A_1A_3\cdot B_1B_3$ 在直线 PQ 上．同样三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $C_1C_2C_3$ 也通过 PQ 成透视，点 $R'=A_1A_3\cdot C_1C_3$ 在 PQ 上．但是，因为 R 和 R' 既在 A_1A_3 上又在 PQ 上，所以它们必须重合．这样我们就有(a)．

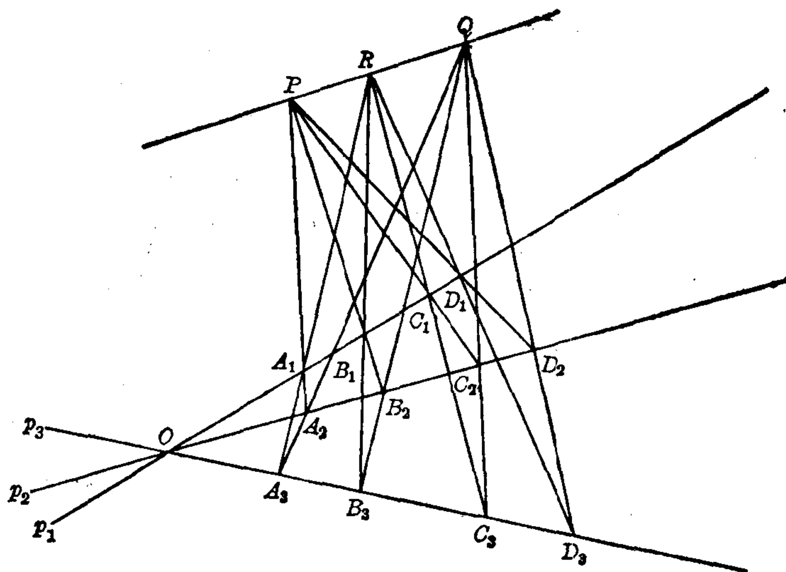


图 3-10

3.6 证明：如果直线 p_1, p_2, p_3, p_4 中没有三条共点，且

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P}{\barwedge}p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge}p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)$$
$$\overset{R}{\barwedge}p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots),$$

则存在一条直线 p_* 和点 S, T 使得

(b) $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{S}{\barwedge}p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots)\overset{T}{\barwedge}p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots)$.

证明：参看图 3-11. 设 $O_{12}=p_1\cdot p_2$, $O_{34}=p_3\cdot p_4$, 作 $p_*=O_{12}O_{34}$, 在 p_* 上得到 $p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots)$, 使得

$$p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots)\overset{Q}{\barwedge}p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)$$

又 $$p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{P}{\barwedge}p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots),$$

所以(因为 p_1, p_2, p_* 共点，应用定理 3.1 可得)在 PQ 上存在一点 S 使得：

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{S}{\barwedge}p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots).$$

同样，因为直线 p_3, p_4, p_* 共点，在 QR 上存在一点 T, 使得

$$p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots)\overset{T}{\barwedge}p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots)$$

这样就得到了(b).

3.7 证明：如果 p_1, p_2, p_3, p_4 是不同的直线，p_1, p_2, p_4 在点 O 上而 p_3 不在，且

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{P}{\barwedge}p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge}$$
$$p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)\overset{R}{\barwedge}p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots),$$

则存在不同于 p_1 和 p_4 的直线 p_* 以及点 S 和 T, 使得

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\overset{S}{\barwedge}p_*(A_*, B_*, C_*, D_*, \cdots)\overset{T}{\barwedge}p_4(A_4, B_4, C_4, D_4, \cdots).$$

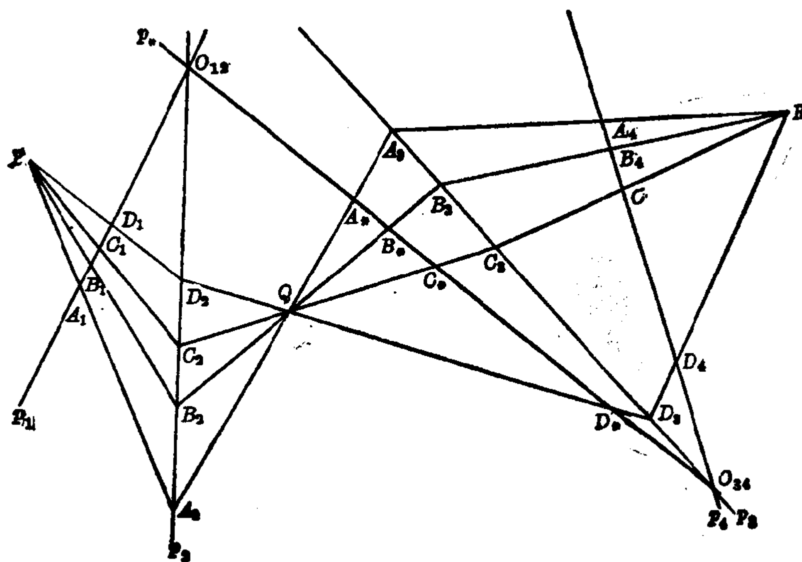


图 3-11

证明：参看图 3-12, 在 $V_{23}=p_2\cdot p_3$ 上任取一不同于 p_2, p_3 且不在 P 上的直线 p, 从 P 把 p_2 上的点列射影到 p, 则

$$p(A, B, C, D, \cdots)\overset{P}{\barwedge}p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{Q}{\barwedge}p_3(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots).$$

由于 p_1, p_2, p_3 共点，由定理 3.1 得知在 PQ 上存在一点 U 使得

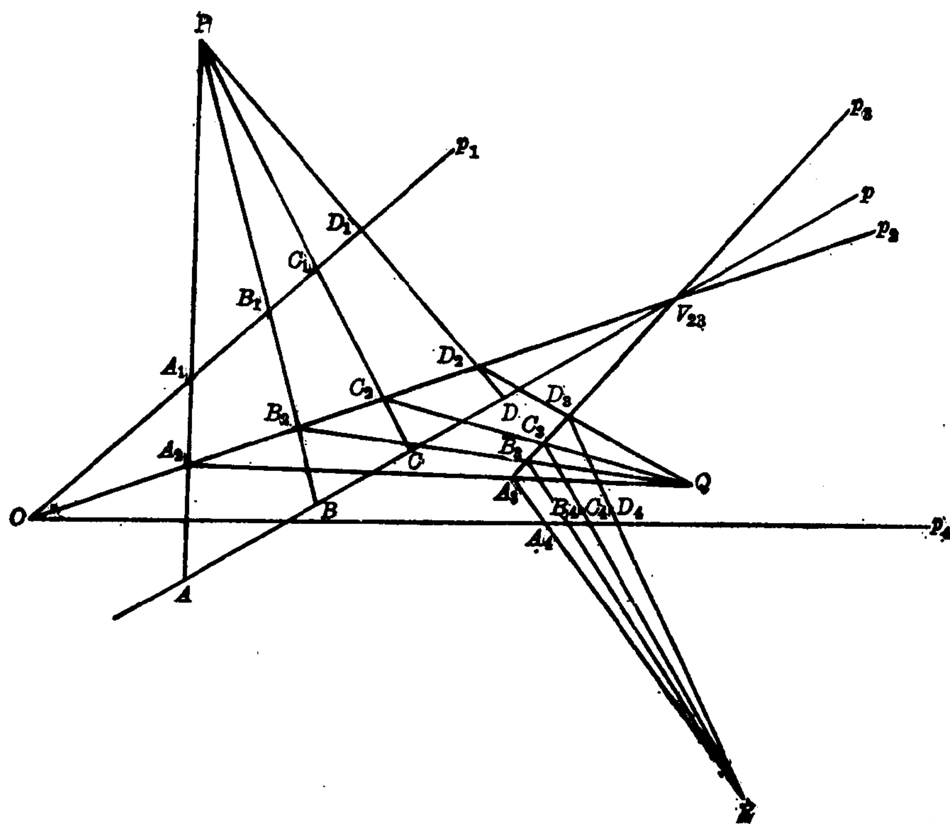


图 3-12

$$p(A,\ B,\ C,\ D,\ \cdots)\overset{U}{\barwedge}p_3(A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3,\ \cdots),$$

在一系列$p_1\overset{P}{\barwedge}p\overset{U}{\barwedge}p_3\overset{R}{\barwedge}p_4$中，直线$p_1$, p, p_3, p_4中没有三条共点，再由定理3.2可以知道存在直线p_*和点S, T使得

$$p_1\overset{S}{\barwedge}p_*\overset{T}{\barwedge}p_4.$$　　证毕.

§3.3 补 充 题

3.8 (a) 四个不同的点A_1, A_2, A_3, A_4(没有三点共线)确定唯一一个完全四点形. 证明同样这些点恰好确定三个不同的简单四点形: $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_4A_3$, $A_1A_3A_2A_4$.

(b) 叙述并证明(a)的对偶.

(c) 描述平面完全五点形和它的平面对偶.

(d) 象(a)那样讨论简单平面五点形和它的对偶. 举出几个由五个不同点确定的简单五边形.

(e)和(d)一样讨论简单平面六点形(六边形)和它的对偶.

3.9 为了得到笛沙格构图，我们从D和E向三角形ABC投影(见图3-2). 若从A和E向三角形BCD投影，重复这个讨论.

3.10 在笛沙格构图中(见图3-3)，证明:

(a) 存在十对透视三角形.

(b) 在完全四点形$A_1B_1C_1P$和完全四线形P, A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2中: 四点形的每一边

都在四线形的一个顶点上. 举出其他四对这样的四点形和四线形.

3.11 在同一平面上给定三角形 ABC 和点 P. 设 P 点和各顶点的连线分别交这三角形的对边于 A', B', C', 作出三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的透视轴 p. 并研究其对偶图形.

p 轴称为 P 的极线, 而 P 称为 p 关于三角形 ABC 的极点. p 总在 P 上吗?

3.12 (a) 证实定理 3.1 的推论.

(b) 化简 $p_1(A_1, B_1, \cdots)\overset{P_1}{\barwedge}p_2(A_2, B_2, \cdots)\overset{P_2}{\barwedge}p_1(A_3, B_3, \cdots)\overset{P_3}{\barwedge}p_2(A_4, B_4, \cdots)$ 为 $p_1(A_1, B_1, \cdots)\overset{X}{\barwedge}p_2(A_4, B_4, \cdots)$.

3.13 叙述并证明习题 3.4 的对偶.

3.14 证明: 如果三个三角形通过一公共点 P 两两成透视, 那么它们的透视轴共点.

3.15 叙述并证明习题 3.14 的逆命题.

3.16 在图 1-1 中, 在 r 上另取一点 A_4, 设 $B_1A_4\cdot p=C_4$, $A_1C_4\cdot s=B_4$, 证明

$$(A_1, A_2, A_3, A_4)\barwedge(B_1, B_2, B_3, B_4).$$

3.17 在直线 r 上取四个不同点 A_1, A_2, A_3, A_4, 从不在 r 上的任一点 P 把它们分别投影到另一直线 s 上的 B_1, B_2, B_3, B_4. 画出三元点组 A_1, A_2, A_3 和 B_2, B_1, B_4 的巴普斯线 p. 证明 $T=A_4B_1\cdot B_3A_2$ 在 p 上且 $(A_1, A_2, A_3, A_4)\barwedge(B_2, B_1, B_4, B_3)$.

3.18 对于习题 3.17 中的这些点证明:

(a) $(A_1, A_2, A_3, A_4)\barwedge(B_4, B_3, B_2, B_1)$.

(b) $(A_1, A_2, A_3, A_4)\barwedge(B_3, B_4, B_1, B_2)$.

3.19 证明: 如果在完全四点形 $PQRS$ 和完全四线形 $pqrs$ 中四点形的边 PQ, PR, PS, QR, QS 分别在四线形的顶点 $r\cdot s$, $q\cdot s$, $q\cdot r$, $p\cdot s$, $p\cdot r$ 上, 那么四点形的边 RS 在这四线形的顶点 $p\cdot q$ 上.

3.20 给定一个四点形集的五个点, 当(a)给定的点互不相同时, (b)五个点中有两个重合时, 画出它的第六个点.

3.21 叙述并画出习题 3.20 的对偶.

3.22 证明: 如果两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 通过一点成透视, 那么点 $R=AB\cdot A'B'$, $S=BC\cdot B'C'$, $T=CA\cdot C'A'$, $U=AB'\cdot A'B$, $V=BC'\cdot B'C$, $W=CA'\cdot AC'$ 三个一组位于四条直线上.

3.23 证明习题 1.17 中的猜测.

提示: 在图中令 $p\cdot e=E$, $p\cdot f=F$; $QE=e'$, $QF=f'$, $e'\cdot d=E'$, $f'\cdot d=F'$, $BE'=e''$, $BF'=f''$, 证明 e, c', f'' 共点.

3.24 (a)证明: 完全四点形的对角三角形同以这个四点形的三个顶点为顶点的四个三角形中的每一个都成透视. (b)证明由在(a)中得到的四条透视轴为边的完全四线形与这个完全四点形有相同的对角三角形.

3.25 叙述并证明习题 3.24 的对偶.

3.26 在图 3-9 中, 设 $A=A_1B_2\cdot B_1A_3$, $B=A_1B_3\cdot B_1A_2$, $C=A_2B_1\cdot B_2A_3$, $D=A_2B_3\cdot B_2A_1$, $E=A_3B_1\cdot B_3A_2$, $F=A_3B_2\cdot B_3A_1$; $R=BE\cdot AF$, $S=BD\cdot AC$, $T=CE\cdot DF$. 证明: (a)直线 AB, CD, EF 在 O 上; (b)点 R, S, T 在 p 上.

3.27 如图 3-1(b)所示, 四线形 $pqrs$ 以 abc 为对角三角形, 设 $(a\cdot b)(p\cdot r)=d$, $(a\cdot b)$

$\cdot(q\cdot s)=e$, $(b\cdot c)(p\cdot q)=f$, $(b\cdot c)(r\cdot s)=g$, $(c\cdot a)(p\cdot s)=i$, $(c\cdot a)(q\cdot r)=j$. 证明三元线组 d, g, i; d, f, j; e, f, i; e, g, j 中的每一组都共点.

提示：考虑通过 q 成透视的三角形 abc 和 prs.

3.28 叙述并证明习题 3.27 的对偶.

3.29 给定三角形 abc 和不在顶点上的直线 p, 作出以 abc 为对角三角形的四线形 $pqrs$, 这个四线形是唯一的吗?

提示：设 $(a\cdot b)(c\cdot p)=d$, $(a\cdot c)(b\cdot p)=g$, $(b\cdot c)(d\cdot g)=h$, 则有 $(a\cdot h)(b\cdot g)=s$, $(a\cdot h)(c\cdot d)=r$, $(b\cdot r)(c\cdot s)=q$.

3.30 证明：习题 3.29 中的四线形由它的对角三角形和任意一条边所确定.

3.31 叙述并证明习题 3.29 和 3.30 的对偶.

3.32 动三角形的边通过三个固定的共线点，而它的两个顶点沿固定直线 r 和 s 移动. 证明第三个顶点描出一条与 r, s 共点的直线.

3.33 通过给定三角形的每个顶点画一条直线. 证明这些直线共点的充要条件是它们与给定直线 x 的交点以及这个三角形各边与 x 的交点组成一个四点形点集.

3.34 在三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 中，若 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 共点于 C_1, 而 A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 共点于 C_2, 则称这两个三角形成二重透视，若 A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 又共点于 C_3, 则称这两个三角形成三重透视.

(a) 已知三角形 $A_1A_2A_3$ 和两个不同点 B_1, B_2, 确定 B_3 使得三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 成二重透视.

(b) 验证(a)中的两个三角形成三重透视.

(c) 证明：如果两个三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 以下列顺序中的任意两个成透视：

$A_1, A_2, A_3 \barwedge B_1, B_2, B_3$. $A_1, A_2, A_3 \barwedge B_2, B_3, B_1$. $A_1, A_2, A_3 \barwedge B_3, B_1, B_2$.

则它们也以第三个顺序成透视.

(d) 证明三角形 $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ 中的任意两个都成三重透视，且以第三个三角形的顶点为透视中心.

3.35 根据巴普斯定理证明习题 3.34(d)中三个三角形的顶点位于三条直线上.

3.36 用巴普斯定理证明习题 3.1 中的定理.

提示：在图 3-7 中令 $A_2A_3\cdot B_1B_3=Q$, $A_2B_1\cdot A_3B_3=R$, $A_1A_2\cdot PQ=S$, $B_1B_2\cdot PQ=T$, 然后对于下列共线三元点组应用巴普斯定理：(a)由 A_1, P, B_1 和 A_3, Q, A_2 得出 C_2, R, S 共线；(b)由 B_2, P, A_2 和 B_3, Q, B_1 得出 C_1, R, T 共线；(c)由 B_1, A_2, R 和 Q, S, T 得出 C_2 C_1, C_3 共线.

第四章 调 和 集

§4.1 基 本 内 容

1. 调和点集和调和线集

考虑图 4-1 中的四个点 A, B, D, E，它是由完全四点形 $PQRS$ 的对角三角形的边 $c=AB$ 截这四点形的各边所得到的点集. 图 4-1′ 是图 4-1 的对偶，其中的四线集 a, b, d, e 是由完全四线形 $pqrs$ 的对角三角形的顶点 $C=a\cdot b$ 向这四线形的各顶点投影所得. 考虑这些图形可引出下列对偶定义.

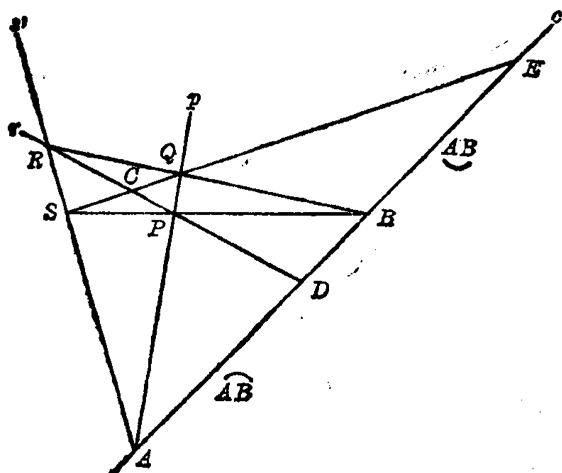


图 4-1

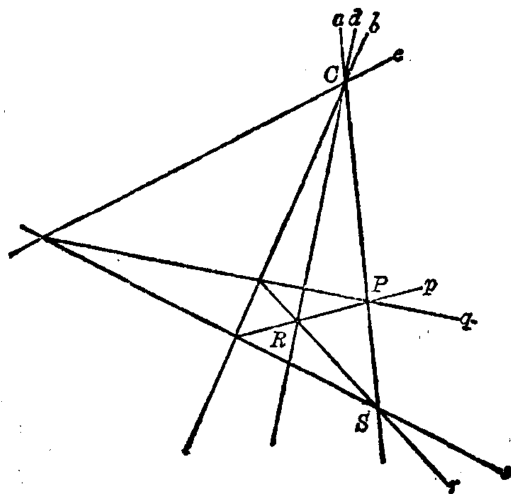


图 4-1′

我们称四个共线点 A, B, D, E 成一调和点集，是指存在一完全四点形，它有两条对边在 A 上，另两条对边在 B 上，同时第三组对边一条在 D 上，一条在 E 上. 点 $D(E)$ 称为 $E(D)$ 关于 A 和 B 的调和共轭. 记作 $H(A, B; D, E)$. 注意到在 $H(A, B; D, E)$ 中 A 和 B 处于平等地位；因此我们也可以写成 $H(B, A; D, E)$. 同样，D 和 E 处于平等地位；因此我们也可以写成 $H(A, B; E, D)$ 或 $H(B, A; E, D)$. 在任何一种情况中，我们都说点对 A, B 被点对 D, E 调和分隔.

我们称四条共点线 a, b, d, e 成一调和线集，是指存在一个完全四线形，它有两个对顶点在 a 上，另两个对顶点在 b 上，同时第三组对顶点一点在 d 上，一点在 e 上. 直线 $d(e)$ 称为 $e(d)$ 关于 a 和 b 的调和共轭. 记作 $H(a, b; d, e)$. 注意到在 $H(a, b; d, e)$ 中 a 和 b 处于平等地位；因此我们也可写成 $H(b, a; d, e)$. 同样，d 和 e 处于平等地位；因此我们也可写成 $H(a, b; e, d)$ 或 $H(b, a; e, d)$. 在任何一种情况中，我们都说线对 a, b 被线对 d, e 调和分隔.

当 A, B, D 是直线 c 上的不同点时，D 关于 A 和 B 的调和共轭点可用下列步骤作出：在 A 上任取两条不同直线 $p\neq c$ 和 $s\neq c$；在 D 上任取一条直线 $r\neq c$. 设 $p\cdot r=P$, $s\cdot r=R$; $BP\cdot s=S$, $BR\cdot p=Q$, 则 $SQ\cdot c=E$ 是所求的点.

当 a, b, d 是点 C 上的不同直线时，d 关于 a 和 b 的调和共轭线可用下列步骤作出：在 a 上任取两不同点 $P\neq C$ 和 $S\neq C$; 在 d 上任取一点 $R\neq C$. 设 $PR=p$, $RS=r$; $(b\cdot p)S=s$, $(b\cdot r)P=q$. 则 $(s\cdot q)C=e$ 是所求的直线.

关于符号 $H(A, B; D, E)$，这里还要先说一句，由图 4-1，我们发现

$$\because\quad (A, B, D, E)\overset{R}{\barwedge}(S, Q, C, E)\overset{P}{\barwedge}(B, A, D, E),$$

从而
$$(A, B; D, E)=(B, A; D, E).$$

鉴于关于完全四点形的对边点的不共线的假设，我们断定 $(A, B; D, E)=-1$. 因此可以取 $H(A, B; D, E)$ 等于这个值. 然而，为了避免交比，我们将认为 $H(A, B; D, E)$ 仅仅是"共线点 A, B, D, E 成一调和集"或"点 A, B 被点 D, E 调和分隔的缩写". 我们有：

定理 4.1 当 A, B, D 是不同的共线点时，由 $H(A, B; D, E)$ 可推出 A, B, D, E 是不同的共线点.

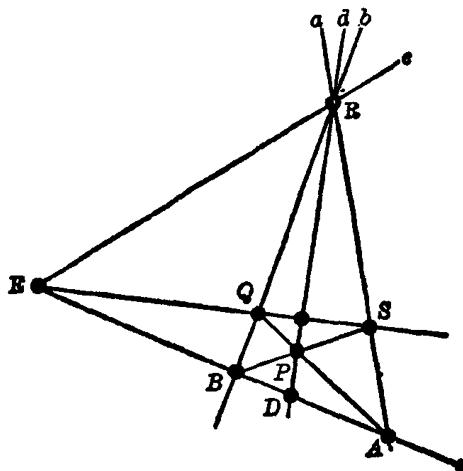


图 4-2

图 4-2 在图 4-1′ 的基础上作了一些标号的修改，以便清楚地显示直线 s 截调和线集 a, b, d, e 为调和点集 A, B, D, E（我们留给读者证明 $PQRS$ 是与这点组相伴的四点形）. 反过来，从一条直线上的某个调和点集出发，任取不在这直线上的一点作为 R, 我们就能得到形如图 4-2 的图形. 这样，我们有：

定理 4.2 从不在直线 s 上的任一点 R 向 s 上的某个调和点集作射影得到一调和线集.

及其对偶：

定理 4.2′ 从不在点 R 上的任一直线向 R 上的某个调和线集作截影得到一调和点集.

设四条共点线 a, b, d, e 分别被不同的直线 r 和 s 截得点 A, B, D; E 和 A', B', D', E'. 由透视的定义 $(A, B, D, E)\barwedge(A', B', D', E')$ 和定理 4.2～4.2′ 推出：如果 $H(A, B; D, E)$，则 $H(A', B'; D', E')$. 因为射影是一列透视的结果，对于任意两个共线点集 A, B, D, E 和 A'', B'', D'', E''，我们有：

定理 4.3 如果 $(A, B, D, E)\barwedge(A'', B'', D'', E'')$，则由 $H(A, B; D, E)$ 可推出 $H(A'', B''; D'', E'')$. 反之亦然.

设 A, B, D, E 是四个共线点且 $H(A, B; D, E)$. 根据定理 2.10, $(A, B, D, E)\barwedge(D, E, A, B)$，于是 $H(D, E; A, B)$，且有

定理 4.4 如果 A, B, C, D 四点共线且点对 A, B 被点对 D, E 调和分隔，那么点对 D, E 也被点对 A, B 调和分隔.

如图 4-1，假设 D 取在 c 的线段 $\overset{\frown}{AB}$ 上，显然，当 $D\neq A$ 和 $D\neq B$ 时，E 在线段 $\underset{\smile}{AB}$ 上. 在习题 4.6 中，我们要求读者证明当 D 趋于 A 时，E 也趋于 A，当 D 趋于 B 时，E 也趋于 B. 让 D 从 A 移动到 B 描出线段 $\overset{\frown}{AB}$. D 的这种移动不会干扰点 R、Q，从而也不会干扰直

线 AR, AQ, BR. 反之,直线 CR 绕点 R 反时针方向旋转,点 P 沿着图中所示线段从 A 移动到 Q, 直线 BP 绕点 B 顺时针方向旋转,点 S 沿图中所示线段从 A 移动到 R, 点 E 沿 $\overset{\frown}{AB}$ 从 A 移动到 B. 我们留给读者研究倒转 D 的移动方向所得的结果和下列定理.

定理 4.5　如果 D 沿一给定方向描出 $\widehat{AB}$, 那么 D 关于 A 和 B 的调和共轭 E 就沿相反方向描出 $\overset{\frown}{AB}$.

作出 D 关于 A, B 的调和共轭时,允许在 A 上的两条直线和在 D 上的直线的方向是任意的,只要求它们的方向不同于 $o=AB$ 并且在 A 上的两条直线互不相同. 这种选择上的自由可由定理 3.5 推出,它实际上表明 E 的位置由其它三点的位置确定并且不依赖于所用到的特殊四点形. 这样,定理 3.5 在这里可以重新叙述如下:

定理 4.6　如果 A, B, D 是共线点,则 D 关于 A, B 的调和共轭点是唯一的.

它的对偶是:

定理 4.6′　如果 a, b, d 是共点线,则 d 关于 a, b 的调和共轭线是唯一的.

在习题 4.1 中,我们将证明

定理 4.7　如果 A 和 B 是完全四点形的两个顶点, E是它在 AB 上的对边点, D在 AB 和其它对边点的连线上,则 $H(A, B; D, E)$.

在习题 4.2 中,我们将证明

定理 4.8　如果 A', B', C' 是三个不同的共线点,且这三点分别在给定三角形 ABC 的三边上,则其中每一点关于这三角形同一边上的两顶点的调和共轭点与第三顶点的连线共点.

定理 4.8 提供了证明三条不同直线共点的另一方法. 它的对偶是

定理 4.8′　如果 a', b', c' 是三条不同的共点线,且这三条直线分别在给定三角形 ABC 的三顶点上,则其中每一条关于这三角形同一顶点上的两条边的调和共轭线与第三边的交点共线.

2. 完全四点形的调和性质

在完全四点形中,它的任二顶点与它的对角三角形的一顶点共线. 这样(见图 4-3),这个四点形的每一边都与它的对角三角形交于两点——一个是对边点和一个与这个四点形相伴的所谓调和点. 例如,完全四点形的边 PQ 与它的对角三角形交于对边点 A 和一个调和点 $F=PQ\cdot BC$. 除 F 外,图 4-3 中的完全四点形的调和点是 $D=PR\cdot AB$, $E=QS\cdot AB$, G

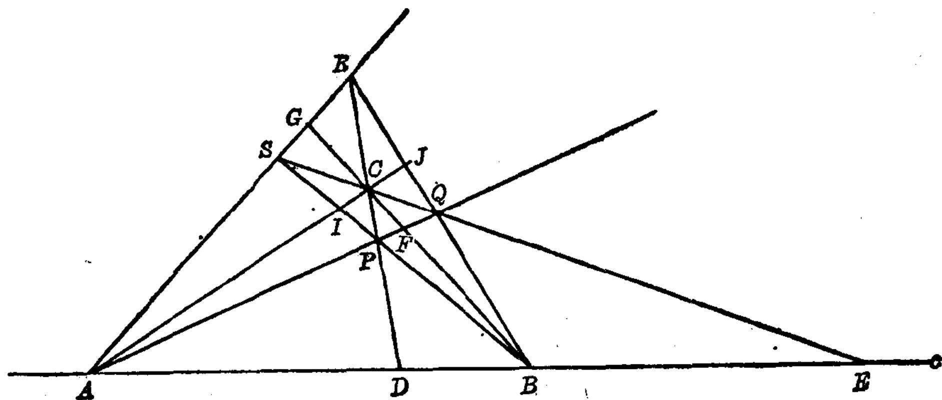


图 4-3

$=RS\cdot BC$, $I=PS\cdot AC$, $J=QR\cdot AC$. 我们得到:

定理 4.9 在完全四点形的任一边上有这四点形的两个顶点，它的对角三角形的一个顶点和一个调和点.

定理 4.10 在完全四点形的对角三角形的任一边上有这对角三角形的两个顶点和两个调和点.

从 C 把 A, B, D, E 投影到 RS 上,我们分别得到 A, G, R, S. 于是有,

定理 4.11 对角三角形的顶点和在完全四点形的任一边上的调和点，调和分隔这四点形在该边上的顶点.

现在，四条直线 BR, BS, BA, BG 是调和集(定理 4.2)，它们被直线 AC 截得的截影 J, I, A, C 也是调和集(定理 4.2′). 于是我们有

定理 4.12 完全四点形在它的对角三角形的任一顶点上的两边被这个对角三角形在该顶点上的两边调和分隔.

定理 4.13 完全四点形的对角三角形任一边上的对边点被在该边上与这四点形相伴的调和点调和分隔.

从习题 3.28,我们有

定理 4.14 与完全四点形相伴的六个调和点,三个一组位于四条直线上.

3. 射影直线上的调和网

在图 4-4 中，A, B, C 是直线 o 上的三个不同点. 在 A 上任取一直线 $q\neq o$, 在 q 上取两个不同点 $R\neq A$ 和 $S\neq A$. 设 $BR\cdot CS=D$, $AD=t$; $CR\cdot t=E_1$, $SE_1\cdot o=F_1$; $F_1R\cdot t=E_2$, $SE_2\cdot o=F_2$; $F_2R\cdot t=E_3$, $SE_3\cdot o=F_3$; $\cdots$. 由以上作图，我们有 $H(A, C; B, F_1)$, $H(A, F_1; C, F_2)$, $H(A, F_2; F_1, F_3)$, $\cdots$, $H(A, F_{n-1}; F_{n-2}, F_n)$, $\cdots$. 我们称点集

$$A,\ B,\ C,\ F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ \cdots \tag{1}$$

构成一个由给定点 A, B, C 所生成的*调和序列*. 因为任何调和集中的元素都是不同的,所以我们有理由假设(1)的所有点都是不同的(后面将给出证明). 假设上述条件成立,因为这种作图能无限地继续下去,显然,调和序列中的点的个数是无穷的.

让我们重新从 o 上的点 A, B, C 开始. 首先,象先前那样作出 F_1 并标以 G_1; 然后在 o 上作其它点,从而得到集合:

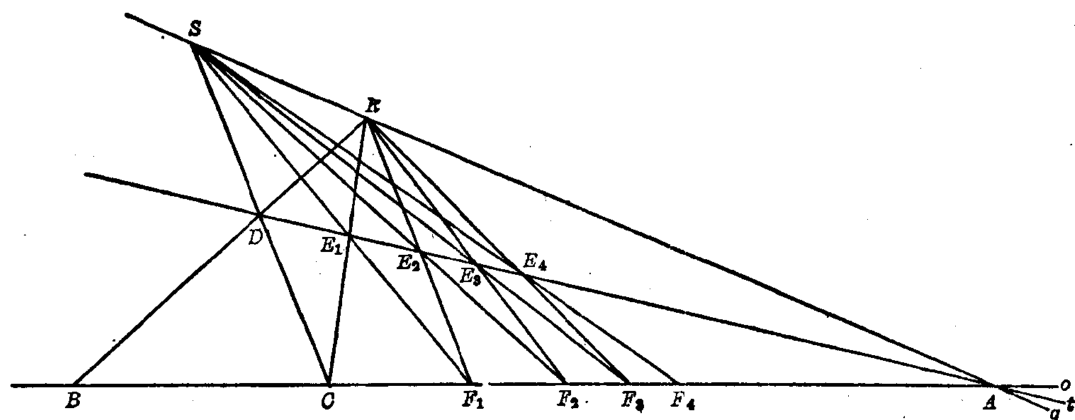


图 4-4

$$A,\ B,\ C,\ G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4,\ G_5,\ \cdots, \tag{2}$$

使得对于$W=G_n$，这里n是正整数，我们有$H(X, Y; Z, W)$，即W是Z关于X和Y的调和共轭．而X, Y, Z是(2)中在G_n前的某个三元点组．例如，对于G_4可以有$H(A, G_3; G_2, G_4)$或$H(B, C; G_1, G_4)$或$H(G_1, G_3; G_2, G_4)$．在任何情况下，我们都说$W=G_n$与给定点A, B, C调和相关．与A, B, C调和相关的全体点的集合称为在o上的调和网，记为$R(A, B, C)$．我们首先注意到确定点$G_2, G_3, G_4, G_5, \cdots$．没有系统的方法，即就是没有一定的规律．这样，我们不能期望所有的G都必定互不相同．因为$R(A, B, C)$包括由A, B, C生成的调和序列，所以调和网也是一个无穷点集．然而，这两个集合绝不会相等．例如，由$H(B, C; G_1, G_4)$确定的G_4是调和网的一个元素但不是调和序列的一个元素．

在习题 4.4 中，我们将证明

定理 4.15 调和网由这网中任意三个不同点所确定．

4．拓广直线上的调和网

我们暂时返回到第一章中的拓广平面，它是由欧氏平面连同一条理想直线组成的．我们的目的是作出调和网$R(P_\infty, P_0, P_1)$，这里P_0和P_1是拓广直线(p, P_∞)上任意两个不同的普通点．我们将看到它能有规则地作出，所以我们将得到前一节调和网的更清楚的图象．在作图中(见图 4-5)我们将利用理想直线l_∞上的不同理想点$R_\infty \neq P_\infty$和$S_\infty \neq P_\infty$．设$P_0R_\infty \cdot P_1S_\infty = E_0$，$E_0P_\infty = t$；$P_1R_\infty \cdot t = E_1$，$E_1S_\infty \cdot p = P_2$；$P_2R_\infty \cdot t = E_2$，$E_2S_\infty \cdot p = P_3$；$\cdots$．那样，$P_2$是$P_0$关于$P_\infty$, P_1的调和共轭点，所以$H(P_\infty, P_1; P_0, P_2)$．其证明如下：直线$t$和$l_\infty$在$P_\infty$上，直线$P_0R_\infty$在$P_0$上，交$t$于$E_0$，交$l_\infty$于$R_\infty$．此时$P_1E_0$交$l_\infty$于$S_\infty$，$P_1R_\infty$交$t$于$E_1$和$E_1S_\infty$交$p$于$P_2$．现在考虑在$p$上建立一个坐标系，其中$P_0$是原点(即坐标

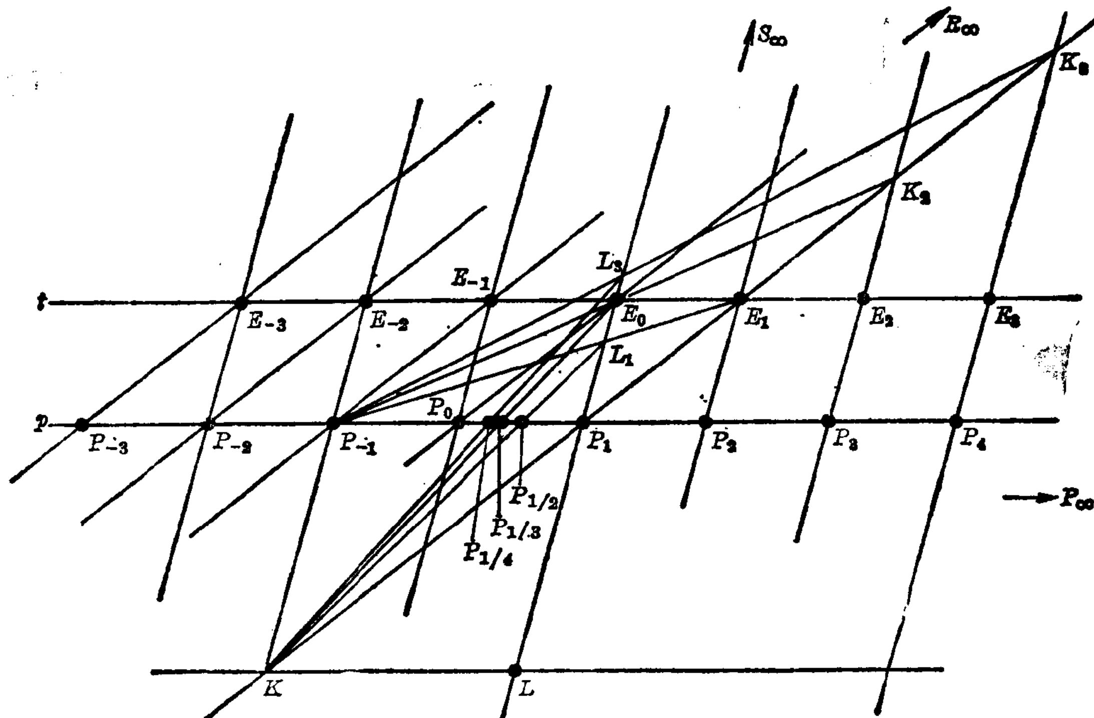


图 4-5

为 0 的点), P_1 是单位点(即坐标为 1 的点). 因为

$$P_0P_2=P_0P_1+P_1P_2=P_0P_1+E_0E_1,$$

且 $E_0E_1=P_0P_1$, 所以推出 P_2 是 p 上坐标为 2 的点. 这样, 通过连续使用 $H(P_\infty, P_{n-1}; P_{n-2}, P_n)$, 我们能作出具有坐标 n 的点 P_n, $n=2, 3, 4, \cdots$.

设 $P_0S_\infty \cdot t=E_{-1}$, $E_{-1}R_\infty \cdot p=P_{-1}$; $P_{-1}S_\infty \cdot t=E_{-2}$, $E_{-2}R_\infty \cdot p=P_{-2}$; $\cdots$. 现在 P_{-1} 是 p 上坐标为 -1 的点, P_{-2} 是 p 上坐标为 -2 的点, $\cdots$. 这样, 通过连续使用 $H(P_\infty, P_{1-n}; P_{2-n}, P_{-n})$, 我们能作出坐标为 $-n$ 的点 P_{-n}, $n=1, 2, 3, 4, \cdots$.

下一步, 设 P_x 由 $H(P_1, P_{-1}; P_2, P_x)$ 所确定. 在作图(见图 4-5)中, 在 P_1 上取直线 P_1R_∞ 和 P_1S_∞, 在 P_2 上取直线 P_2S_∞ 交 P_1R_∞ 于 $K_1=E_1$, 交 P_1S_∞ 于 S_∞. 设 $P_{-1}K_1 \cdot P_1S_\infty=L_1$, $P_{-1}S_\infty \cdot P_1R_\infty=K$; 那么 $P_x=KL_1 \cdot p$. 我们证明 $P_x=P_{1/2}$, 即这点在 p 上坐标为 1/2. 设 $KP_\infty \cdot P_1S_\infty=L$. 从相似三角形 $L_1P_xP_1$ 和 L_1KL, 我们有:

$$\frac{P_xP_1}{KL}=\frac{P_1L_1}{LL_1}=\frac{\frac{2}{3}P_1E_0}{\frac{8}{3}P_1E_0}=\frac{1}{4}.$$

于是 $P_xP_1=\frac{1}{4}KL=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$; $P_0P_x=\frac{1}{2}$, $P_x=P_{1/2}$. 同样(见习题 4.28), 我们能够作出坐标为 $1/n$ 的点 $P_{1/n}$, $n=3, 4, 5, \cdots$. 最后, 再从任一三元点组 P_∞, P_0, $P_{1/n}$ 出发, 重复上两段的作图步骤, 我们可确定点

$$\cdots, P_{-3/n}, P_{-2/n}, P_{-1/n}, P_0, P_{1/n}, P_{2/n}, P_{3/n}, \cdots$$

的位置.

这样, 我们概述了一个系统的方法, 在拓广直线上确定了与有理数集成一一对应的一个点集(即这条直线的普通点的子集). 设 P_a, P_b, P_c 是这个子集中任意三个不同的点, 考虑由 $H(P_a, P_b; P_c, P_x)$ 确定的点 P_x. 我们有(见第二章)

$$(P_a, P_b; P_c, P_x)=\frac{a-c}{a-x}\cdot\frac{b-x}{b-c}=-1.$$

因为 a, b, c 是有理数, 所以 x 也是有理数. 于是 P_x 是这个子集的点, 且这个子集恰好是 $R(P_\infty, P_0, P_1)$.

回到射影平面的图 4-4, 我们重新标记 A 为 P_∞, B 为 P_0, C 为 P_1, D 为 E_0, $F_1=G_1$ 为 P_2 并重复上面所描述的一系列作图, 在射影直线上所得到的这个子集(即调和网)与全体有理数集之间同样存在一个一一对应. 然而, 在这里我们并不关心网中点 P_a 的下标 a 的任何可能的解释, 仅仅把它看作一个方便的标号而已.

§4.2 问题及其解

4.1 证明: 若 A, B 是完全四点形的两个顶点, E 是它在 AB 上的对边点, D 在 AB 和其他对边点的连线上. 则 $H(A, B; , D, E)$.

证明: 在图 4-1 中取 $ABQS$ 为完全四点形, 可立即得出本定理. 当在一条直线上依次给出 A, B, E 或者依次给出 A, E, B 时, 本题指出了作 D 的方法.

4.2 证明: 若 A', B', C' 是三个不同的共线点, 它们分别在三角形 ABC 的各边上, 把

这三个点关于它们所在的边上的两个顶点的调和共轭点分别和三角形的第三个顶点连起来，则这三条连线共点.

证明：参看图 4-6，作 C' 关于 A, B 的调和共轭点 C''，则 $H(A, B; C', C'')$. 令 $A''=BC\cdot B'C''$, $B''=AC\cdot A'C''$. 由 $(A, B, C', C'')\overset{B'}{\barwedge}(C, B, A', A'')$, $(A, B, C', C'')\overset{A'}{\barwedge}(A, C, B', B'')$，推知 A'', B'' 是属于定理中的两个调和共轭点. 现在 $(A, C, B', B'')\overset{A'}{\barwedge}(A, B, C', C'')\overset{B'}{\barwedge}(C, B, A', A'')$，所以 $(A, C, B', B'')\barwedge(C, B, A', A'')$. 由 1. 中的 (i) 可知

$$(C, B, A', A'')\barwedge(B, C, A', A''),$$

所以 $$(A, C, B', B'')\barwedge(B, C, A', A'').$$

但这是一个透视，因此 AB, $A'B'$, $A''B''$ 在 C' 上. 同理，BC, $B'C'$, $B''C''$ 在 A' 上，CA, $C'A'$, $C''A''$ 在 B' 上，那末三角形 ABC 和 $A''B''C''$ 是通过直线 $A'B'C'$ 的透视. 最后，它们是通过一个点的透视，即 AA'', BB'', CC'' 共点.

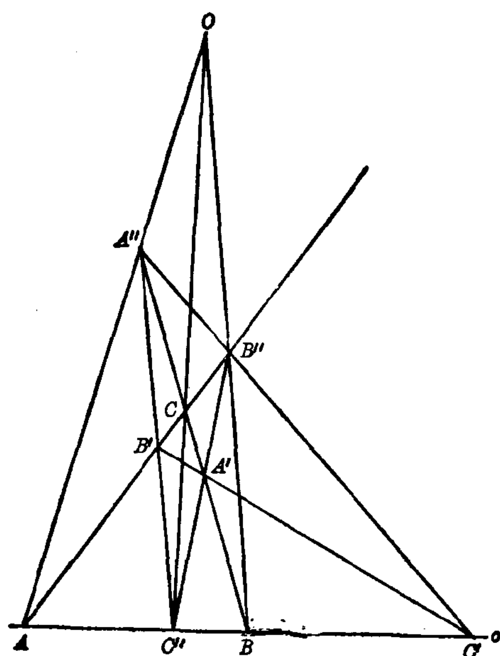


图 4-6

注：由 $A''=BC\cdot B'C''$, $B''=AC\cdot A'C''$, $C''=AB\cdot A'B''$ 可知：若一个三角形的各边被任一不在其顶点上的直线所截，则有，其中任意两个截点分别关于它们所在边上两个顶点的调和共轭点与第三个截点共线.

4.3 考虑图 4-7 中的完全四点形 $PQRS$，它的对角三角形是 ABC，相伴的调和点为 D, E, F, G, I, J. 令 $DI\cdot PQ=K$, $DJ\cdot RS=L$, $EI\cdot RS=M$, $EJ\cdot PQ=N$. 证明三元点组 (a) B, K, M; (b) B, N, L 共线.

证明：(a) 我们有 $(A, C, I, J)\overset{E}{\barwedge}(A, S, M, G)$

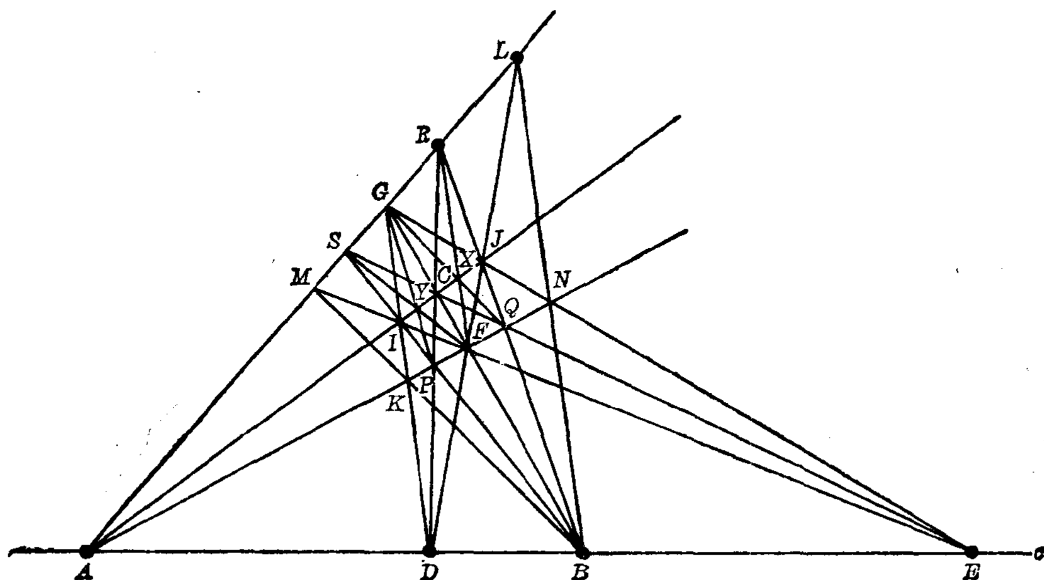


图 4-7

和 $(A, C, I, J)\overset{D}{\barwedge}(A, P, K, F)\overset{B}{\barwedge}(A, S; M_1, G)$.

其中 $M_1=BK\cdot RS$, 由于 $H(A, C; I, J)$, 有 $H(A, S; M, G)$, $H(A, S; M_1, G)$, 由定理 4.6, $M=M_1$, 所以 M 在 BK 上.

(b) 证明与上述类似. 这里我们改变方法试图利用定理 4.8′ 来证明. 首先, 我们需要一个三角形, 使 B, L, N 分别在它的一边上, 不妨取三角形 AQR. 其次我们需要一个点 X, 使得 AX 关于 AQ 和 AR 的调和共轭交 RQ 于 B, QX 关于 QA 和 QR 的调和共轭交 AR 于 L, RX 关于 RA 和 RQ 的调和共轭交 AQ 于 N. 由于

$$(G, F, C, B)\overset{A}{\barwedge}(R, Q, J, B),$$

故我们有 $H(R, Q; J, B)$; 于是 X 一定在 AJ 上. 同理, $H(A, R; G, L)$ 要求 X 在 GQ 上; $H(A, Q; F, N)$ 要求 X 在 FR 上.

现在只要证明 AJ, GQ, FR 共点即可. 考虑 RS 上的不同点 S, G, R 和 PQ 上的不同点 P, F, Q, 由习题 3.4 中的定理可知点 $SF\cdot PQ=Y$, $SQ\cdot PR=C$, $GQ\cdot FR=X$ 与 A 共线. 于是 X 在 AC 上; 直线 AJ, GQ, FR 共点, 且点 B, L, N 共线.

4.4 证明: 一个调和网由这个网中任意三个不同点所确定.

证明: 设 X, Y, Z 是 3. 的调和网 $R(A, B, C)$ (2) 中的三个不同点, 那么, 从 A, B, C 出发, 在作了有限个调和集之后(第一个调和集是 $H(A, C; B, G_1)$), 我们得到 X, Y, Z. 现在由 $H(A, C; B, G_1)$ 可知 $H(A, C; G_1, B)$. 所以与 A, B, C 调和相关的点也与 A, G_1, C 调和相关, 即 $R(A, B, C)=R(A, G_1, C)$, 因为 Y 与 A, G_1, C 调和相关, 在经过有限个步骤后, 我们有 $R(A, B, C)=R(A, Y, C)$, 同理可得: $R(A, B, C)=R(X, Y, C)=R(X, Y, Z)$.

§4.3 补 充 题

4.5 若 a, b, d, e 是四条不同的共点线, 满足 $H(a, b; d, e)$, 那么它们另外还有七种排列, 这些排列也是调和集. 试一一列出.

部分答案: $H(a, b; e, d)$, $H(d, e; a, b)$.

4.6 在一直线上依次取三个不同点 A, D, B, 当 (a) D 靠近 A; (b) D 靠近 B; (c) D 是 AB 中点时, 作出 D 关于 A, B 的调和共轭点.

4.7 叙述习题 4.6 的对偶并写出作法.

4.8 在习题 4.6 中当 (a) $D=A$, (b) $D=B$ 时, 对于 D 关于 A, B 的调和共轭点, 你将作如何选择?

4.9 证明: 若在不同直线上, 有 $H(A, B; C, D)$ 和 $H(A', B'; C', D)$, 则 AA', BB', CC' 共点.

提示: $(A, B, C, D)\barwedge(A', B', C', D)$.

4.10 证明: $H(A, B; D, E)$ 的充要条件是

$$(A, B, D, E)\barwedge(A, B, E, D).$$

4.11 在图 3-9 中的巴普斯线 p 称为 O 关于 r 和 s 的极线, O 称为 p 关于 r 和 s 的极点. 令 $A_1B_1\cdot p=Q_1$, 证明 Q_1 是 O 关于 A_1 和 B_1 的调和共轭点, 进而证明: 若一条直线绕 O

旋转且分别交两条不同直线 r 和 s(都不在 O 上)于点 R 和 S,则 O 关于 R 和 S 的调和共轭点描出 O 关于 r 和 s 的极线.

4.12 讨论习题 4.11 的对偶.

4.13 在习题 4.11 中,对旋转直线的任何位置,令 $RS\cdot p=Q$,证明 Q 关于 r 和 s 的极线通过 O.进而证明:若点 O 关于两条不同直线 r 和 s 的极线在点 Q 上,那么 Q 关于 r 和 s 的极线在 O 上.

4.14 讨论习题 4.13 的对偶.

4.15 在直线 p 上取四个不同点 $A,\ B,\ C,\ D$ 使得 $H(A,\ B;C,\ D)$ 从不在 p 上的任一点 P 作这些点的投影,并且用另一条在 A 上而不在 P 上的直线 q 去截,分别得到点 $A,\ B',\ C',\ D'$,证明 $Q=CD'\cdot C'D$ 在直线 PB 上.

4.16 叙述并证明 4.15 的对偶.

4.17 利用图 4-3 证明:若一个完全四线形的顶点是完全四点形 $PQRS$ 的六个调和点,那么它与这个四点形有相同的对角三角形.

4.18 已知一个完全四线形的对角三角形和一条边,利用习题 4.17 的结果得出这个完全四线形的不同于习题 3.29 的另一个作法.

4.19 已知一个完全四点形的对角三角形和一个顶点,给出这个完全四点形的不同于习题 3.31 的另一种作法.

4.20 不用交比概念,证明定理 4.2.

提示:在图 4-1 中,令 $QA=a,\ QB=b,\ QD=d,\ QE=e,\ AB=p,\ BS=q,\ AR=r,\ PR=s$,由完全四线形 $pqrs$ 可得 $H(a,\ b;\ d,\ e)$.

4.21 利用图 4-6,证明:(a)定理 4.8′.

提示:取 $a'=OA,\ b'=OB,\ c'=OC$.

(b) 设三角形 ABC 的顶点与不在其边上的定点 O 的连线与这些顶点的对边交于 $A'',\ B'',\ C''$,则三角形的每一边与 $A'',\ B'',\ C''$ 中不在这边上的两点连线的交点共线.

4.22 (a) 在图 4-7 中,在 RS 上有四个调和点集,试一一列出,并证明:$(A,G;M,R)=(A,\ G;L,\ S)=-\dfrac{1}{2}$.

(b) 在图 4-7 中除去 $X,\ Y$ 两点外,共有 12 个调和线集,试一一列出.

4.23 利用图 4-7,证明三元点组 $K,\ C,\ L$ 和 $M,\ C,\ N$ 共线.

4.24 设 $r,\ s$ 是相交于 O 的两条不同直线,P 是不在这两条直线上的任意一点,作出 OP 关于 $r,\ s$ 的调和共轭线.(a)证明这条直线是 r 的任意三点 $A_1,\ A_2,\ A_3$ 和 s 上的任意三点 $B_1,\ B_2,\ B_3$ 的巴普斯线(这些点使得 $A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3$ 共点于 P).也就是说,证明这条直线是 P 关于 $r,\ s$ 的极线.(b)在 P 上的任意直线分别交 $r,\ s$ 于不同点 $R,\ S$,交 P 关于 $r,\ s$ 的极线于 T,证明 $H(R,\ S;P,\ T)$.

4.25 已知三角形 ABC 和不是其顶点的 P 点,分别作出 P 关于直线对 $AC,\ CB;AB,\ BC;\ BA,\ AC$ 的极线.令 $c\cdot b=A',\ c\cdot a=B',\ b\cdot a=C'$.(a)证明三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是透视对应的.标出透视轴 p.(b)证明 p 是 P 关于三角形 ABC 的极线(定义见习题 3.11).(c)分别作出 p 上任意一点 Q 关于三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的极线,并证明这些直线交于 p 上.

4.26 在图 4-8 中,$A,\ B,\ D$ 是直线上的三个不同点,而 $A',\ B',\ D'$ 分别是 $A,\ B,\ D$ 中

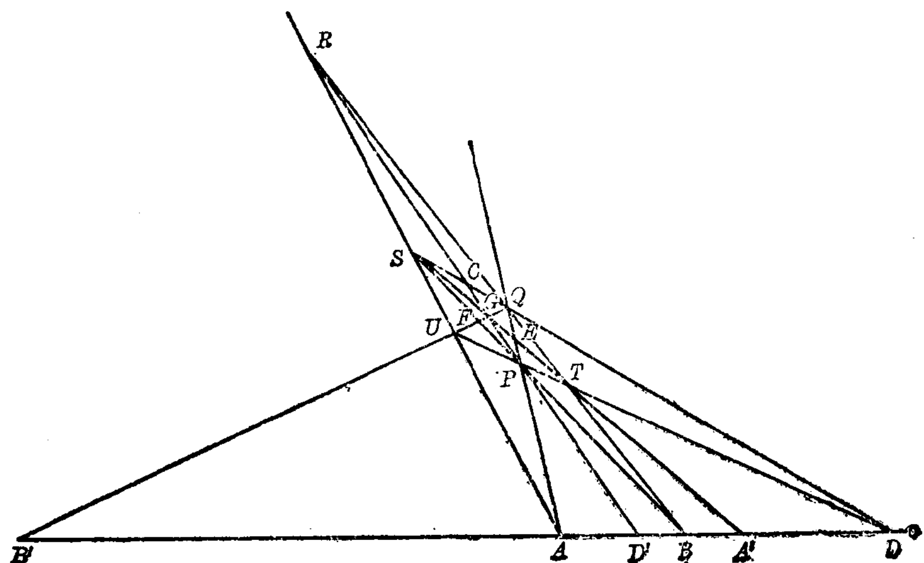


图 4-8

一点关于其他两点的调和共轭，即 $H(A, B; D, D')$, $H(B, D; A, A')$, $H(D, A; B, B')$, 点 $C=PR\cdot QS$, $E=PQ\cdot ST$, $F=PS\cdot QU$ 是与这些调和集和 $G=PR\cdot ST$ 相伴的完全四线形的对边点. 证明:

(a) $G=PR\cdot QU$.

提示: 假设 $G_1=PR\cdot QU$, 则 $(A, B, D, D')\overset{P}{\barwedge}(Q, F, U, G_1)\overset{S}{\barwedge}(D, B, A, A')$.

(b) 三元点组 A, C, F; B, C, E; D, E, F 共线.

提示: 假设 $AC\cdot UQ=F_1$, 那么 $(A, B, D, D')\barwedge(S, Q, D, C)\barwedge(U, Q, B', F_1)$ 及 $(D, A, B, B')\barwedge(Q, U, F, B')$.

4.27 利用图 4-5, 验证:

(a) $H(P_\infty, P_2; P_1, P_3)$ 和 $H(P_\infty, P_3; P_2, P_4)$.

提示: 和以前一样, 在 P_∞ 上取直线 t 和 l_∞, 在 P_1 上取直线 P_1R_∞ 交 t 于 E_1, 交 l_∞ 于 R_∞, 则 $P_2E_1\cdot l_\infty=S_\infty$, $P_2R_\infty\cdot t=E_2$, $E_2S_\infty\cdot p=P_3$.

(b) $H(P_\infty, P_{-1}; P_0, P_{-2})$ 和 $H(P_\infty, P_{-2}; P_{-1}, P_{-3})$.

(c) $H(P_1, P_{-1}; P_3, P_{1/3})$ 和 $H(P_1, P_{-1}; P_4, P_{1/4})$.

提示: 在 P_1 上取 P_1R_∞ 和 P_1S_∞, 在 P_3 上取 P_3S_∞ 交 P_1R_∞ 于 K_2, 交 P_1S_∞ 于 S_∞, 令 $P_{-1}K_2\cdot P_1S_\infty=L_2=E_0$; 则 $L_2K\cdot p=P_{1/3}$.

(d) $H(P_\infty, P_0; P_n, P_{-n})(n=1, 2, 3)$.

提示: 在 P_∞ 上取 t 和 l_∞, 在 P_n 上取 P_nR_∞ 交 t 于 E_n, 交 l_∞ 于 R_∞, 则 $P_0R_\infty\cdot t=E_0$, $[E_0(P_0E_n\cdot l_\infty)]\cdot p=E_{-n}$.

4.28 利用图 4-5, 作出: (a) P_5; (b) $P_{1/5}$, $P_{2/5}$, $P_{3/5}$, (c) $P_{-1/5}$, $P_{-2/5}$, $P_{-3/5}$.

4.29 在一条射影直线上取三个不同点, 依次记为 P_0, P_1, P_∞, 作出并标记 $R(P_\infty, P_0, P_1)$ 中的若干点.

第五章 射 影

§5.1 基本内容

1. 射影和巴普斯构图

在第一章中，我们说在不同直线$p_1 \neq p_n$或同一直线$p_1 = p_n$上的两个不同点列间建立了一个射影$p_1 \barwedge p_n$，是指所讨论的两个点列间有一系列透视

$$p_1 \overset{P_1}{\barwedge} p_2 \overset{P_2}{\barwedge} p_3 \overset{P_3}{\barwedge} \cdots \overset{P_{m-2}}{\barwedge} p_{m-1} \overset{P_{m-1}}{\barwedge} p_m$$

联系着．对偶地，我们说在不同点$P_1 \neq P_n$或同一点$P_1 = P_n$上的两个不同线束间建立了一个射影，是指所讨论的两个线束间有一系列透视

$$P_1 \overset{p_1}{\barwedge} P_2 \overset{p_2}{\barwedge} P_3 \overset{p_3}{\barwedge} \cdots \overset{p_{m-2}}{\barwedge} P_{m-1} \overset{p_{m-1}}{\barwedge} P_m$$

联系着．

根据基本定理，当一个束中的三个元素和它们在另一个同样形式的束中的对应元素已给定时，在这两个束间的射影就完全确定了．把这个事实和习题1.4的结果结合起来，我们就有

定理5.1 在不同直线上的两点列(不同点上的两直线束)间的一个射影如果不是透视，则总能表成恰好两个透视的乘积．在两个迭置的不同列间的一个射影总能表成不少于两个且不多于三个透视的乘积．

当一个束中的三个不同元素和它们在另一个束中的对应元素给定后，作出所求射影的问题实质上就是确定两个束中的第四组对应元素．严格说起来就是：

如果A, B, C, D是一条直线上给定的不同点，A', B', C'，是另一条直线上给定的不同点，或者A, B, C, D, A', B', C'是不同直线上给定的不同点，由三元点组A, B, C和A', B', C'建立起来的射影中，确定点D的对应点D'的位置．解决这个问题的一个方法是：

(i) 用最短的一系列透视建立射影$(A, B, C) \barwedge (A', B', C')$．

(ii) 注意这系列透视对D所得出的结果．

现在给出一种较简便的方法，为此考虑图5-1中在不同直线上的成射影对应的点列$r(A, B, C, D, \cdots)$和$s(A', B', C', D', \cdots)$．设$AA' = a$, $BA' = b$, $CA' = c$, $DA' = d$, $\cdots$; $AB' = b'$, $AC' = c'$, $AD' = d'$, $\cdots$；因为

$$A'(a, b, c, d, \cdots) \barwedge r(A, B, C, D, \cdots) \barwedge s(A', B', C', D', \cdots) \barwedge A(a, b', c', d', \cdots),$$

我们有
$$A'(a, b, c, d, \cdots) \barwedge A(a, b', c', d', \cdots).$$

但这是一个透视(为什么?)，从而点$b \cdot b'$, $c \cdot c'$, $d \cdot d'$, $\cdots$都在$A' \overset{p}{\barwedge} A$的透视轴$p$上，直线$p$称为$r \barwedge s$的射影轴．因为$p$包含$b \cdot b' = BA' \cdot B'A$和$c \cdot c' = CA' \cdot C'A$，所以可推出$p$是关于

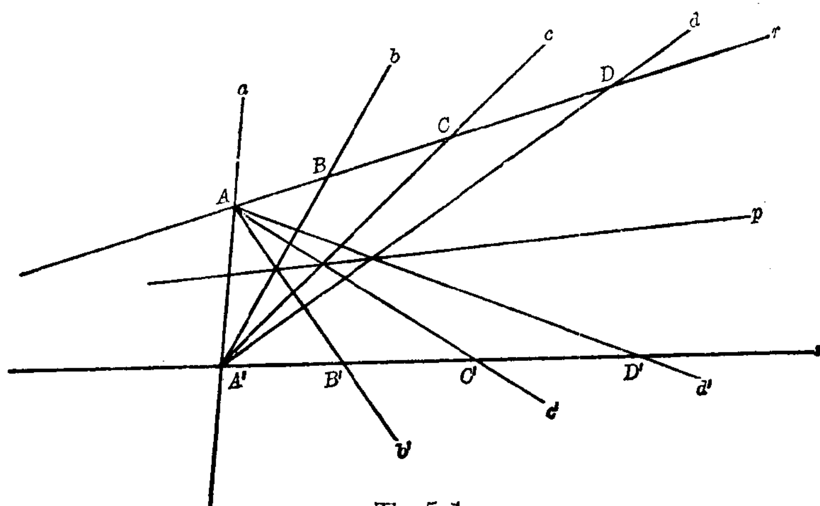


图 5-1

三元点组 A, B, C 和 A', B', C' 的巴普斯线. 又因为关于三元点组 A, B, D 和 A', B', D' 的巴普斯线 q 既在 $b\cdot b'$ 上又在 $d\cdot d'$ 上,所以 $q=p$. 我们已经证明了:

定理 5.2 如果在不同直线上的两个点列 $r(A, B, C, D, \cdots)$ 和 $s(A', B', C', D', \cdots)$ 成射影对应, 那么其射影轴就是关于一个列中的任意三个不同点和它们在另一个列中的对应点的巴普斯线.

它的对偶是:

定理 5.2′ 如果在不同点上的两个线束 $R(a, b, c, d, \cdots)$ 和 $S(a', b', c', d'\cdots)$ 成射影对应, 那么其射影中心就是关于一个束中的任意三条不同直线和它们在另一个束中的对应直线的巴普斯点.

我们回到原来的问题并叙述下列部分解答:

如果 A, B, C, D 是直线 r 上的不同点(见图 5-2), A', B', C', 是另一直线 s 上的不同点, 那么, 由三元点组 A, B, C 和 A', B', C' 建立起来的非透视的射影中, 确定 r 上 D 的对应点 D' 位置的步骤如下:

(a) 作出关于这两个三元点组的巴普斯线.

(b) 连接 D 和 A', B', C' 中任一点(比如说 C')并把连线与 p 的交点记为 X''.

(c) 连接 X'' 和 C, 并把连线与 s 的交点记为 D'.

在这个作图中, $C'D\cdot CD'$ 在 p 上, 根据定理 5.2, D 和 D' 在射影 $(A, B, C)\barwedge(A', B', C')$ 中是对应点.

我们留给读者去证明, 当射影 $r\barwedge s$ 在实际上是透视时, 此作图也成立. 关于两个迭置点列间射影的情况, 见习题 5.1.

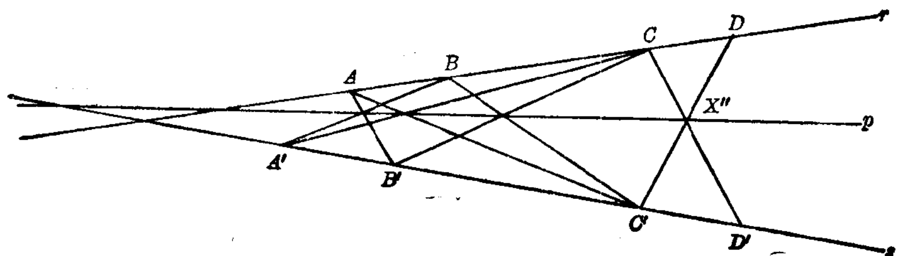


图 5-2

2. 迭置束间的射影

在恒等射影 $r(A, B, C, D, \cdots)\barwedge r(A, B, C, D, \cdots)$ 中，每一点都是自对应点(二重点)．因为一个射影由它的任意三个元素以及对应元素唯一确定，我们有

定理 5.3 如果两个迭置点列(线束)间的一个射影有三个二重点(二重直线)，则这个射影就是恒等射影，即每一点(直线)都是二重点(直线)．

由此推出，两个迭置束间的一个射影(不是恒等射影)可能没有二重元素，也可能有一个或两个二重元素．在习题 1.16 中给出了只有一个二重元素和有两个不同二重元素的射影的例子．在习题 5.2 中还将给出一个有两个二重元素的射影的例子．习题 1.6 的射影中没有二重元素的问题．但我们暂时还不能证明这一点．

在习题 5.3 中，我们将证明

定理 5.4 有一个给定二重元素的迭置束间的每一个非恒等射影，能够表为两个透视的乘积．

习题 5.3 还提供了已知一个二重元素和两对不同对应元素的射影的作图法．有两种形式上不同的作图法，然而，在下一节中，我们将证明它们实质上是相同的．

从习题 5.3 还可以得出

定理 5.5 如果两个迭置束间的非恒等射影有一个二重元素，则它也有第二个二重元素．然而，这两个二重元素可能重合．

当迭置束间的非恒等射影没有二重元素时，它称为*椭圆射影*，只有一个二重元素即两个二重元素重合时称为*抛物射影*，有两个不同的二重元素时称为*双曲射影*．

我们今后将规定以 M, $N(m, n)$ 表示有二重元素的射影的二重点(二重直线)，由基本定理可得：

(1) 一个双曲射影由下列给出元素确定：

(i) 它的两个二重元素和任意一对不同的对应元素．

(ii) 它的一个二重元素和任意两对不同的对应元素．

(iii) 任意三对不同的对应元素．

(2) 一个抛物射影由下列给出元素确定：

(i) 它的二重元素和任意一对不同的对应元素．

(ii) 任意三对不同的对应元素．

这样，$(M, N, A)\barwedge(M, N, A')$ 是双曲射影．因为抛物射影是有重合二重元素的双曲射影，所以，具有二重点 M 的抛物射影可以记为 $(M, M, A)\barwedge(M, M, A')$．

在直线 o 上取四个不同的点 M, N, X, X'，使得 $H(M, N, X, X')$．由习题 5.2 我们知道射影 $(M, N, X)\barwedge(M, N, X')$ 是有二重点 M, N 的双曲射影．从第四章的讨论我们还知道，当 X 沿两个方向之一画出直线 o 时，它的对应点 X' 就沿相反方向画出同一直线．我们称这种射影是*反向的*．

另一方面，在图 5-6(a)的双曲射影中，我们借助于习题 5.12 得出结论：当 x 绕 O 点沿两个方向之一旋转时，它的对应直线 x' 也沿着同一方向绕 O 旋转．我们称这种射影是*同向的*．

用圆作为射影直线的模型，我们不难发现，如果动点 X 朝一个方向画出这条直线，同时

它的对应点 X' 朝相反方向画出这条直线，那么，射影 $X \barwedge X'$ 总有两个不同的二重点．这样，还考虑到存在椭圆射影，我们有

定理 5.6 每一个反向射影都是双曲的，每一个椭圆或抛物射影都是同向的(参看习题 5.4)．

3．双曲射影和抛物射影

细察图 5-5(a)我们看到：

(a) 由完全四点形 RSA_1B_1 在直线 o 上确定的点 M, N, A, A', B, B', 构成一个四点形点集 $Q(M, A, B, N, B', A')$．

(b) 完全四点形 RSA_1B_1 保证了存在双曲射影$(M, N, A, B)\barwedge(M, N, A', B')$(证明见习题 5.3 解答 1)．反过来，这个射影也确定了一个产生这四点形点集的四点形．我们有

定理 5.7 如果 M, N, A, A', B, B' 是六个不同的共线点．则由$(M, N, A, B)\barwedge(M, N, A', B')$可推出 $Q(M, A, B, N, B', A')$．反之亦然．

在习题 5.3 的解答 1 中，N 点的位置由一个完全四点形的作图完全确定．这个完全四点形有一组对边分别在 A 和 B' 上，另一组对边分别在 A' 和 B 上，第五条边在 M 上．如果在图 5-5(a)中互换标号 M 和 N, R 和 A_1, S 和 B_1, p 和 q, 则得到图 5-6(a) 的对偶．由此推出习题 5.3 的两个解答实质上是一样的．

在习题 5.5 中，我们将证明

定理 5.8 有相同二重点 M 的两个抛物射影的乘积，要末是一个恒等射影，要末是以 M 为二重点的另一个抛物射影．

在习题 5.6 中，我们将证明

定理 5.9 $H(M, A', A, A'')$的充要条件是射影$(M, A, A')\barwedge(M, A', A'')$为抛物射影．

4．四点形点集

在习题 5.7 中，我们将证明下述定理三部分中的第一部分：

定理 5.10 六个不同的共线点 X, Y, Z, X', Y', Z' 成一个四点形点集 $Q(X, Y, Z; X', Y', Z')$的充要条件是：

$$(X, Y, Z, X')\barwedge(X', Y', Z', X) \tag{1}$$

或

$$(X, Y, Z, Y')\barwedge(X', Y', Z', Y) \tag{2}$$

或

$$(X, Y, Z, Z')\barwedge(X', Y', Z', Z). \tag{3}$$

在下一章中我们将证明，由在一条直线上的四点形点集 $Q(X, Y, Z, X', Y', Z')$可推出在这条直线上的两个迭置列间的特殊射影$(X, X', Y, Y', Z, Z')\barwedge(X', X, Y', Y, Z', Z)$．换句话说，由定理 5.10 的(1), (2), (3)中的任意一个可推出其它两个．

§5.2 问题及其解

5.1 已知直线 o 上七个不同的点 A, B, C, D; A', B', C' 作出 D 在射影(A, B, C)

$\barwedge(A', B', C')$中的对应点.

解: 参看图5-3, 从不在o上的任意一点P把A', B', C'分别投影到任一直线s上的点A'', B'', C'', s不在P, A', B', C'中的任意一点上. 作出关于三元点组A, B, C和A'', B'', C''的巴普斯线p. 令$DA''\cdot p=X$, $AX\cdot s=D''$, 那么D''是D在射影$(A, B, C)\barwedge(A'', B'', C'')$中的对应点. 令$PD''\cdot o=D'$, 由$o(A', B', C', D')\overset{P}{\barwedge}s(A'', B'', C'', D'')\barwedge o(A, B, C, D)$可知$D'$就是所求的对应点.

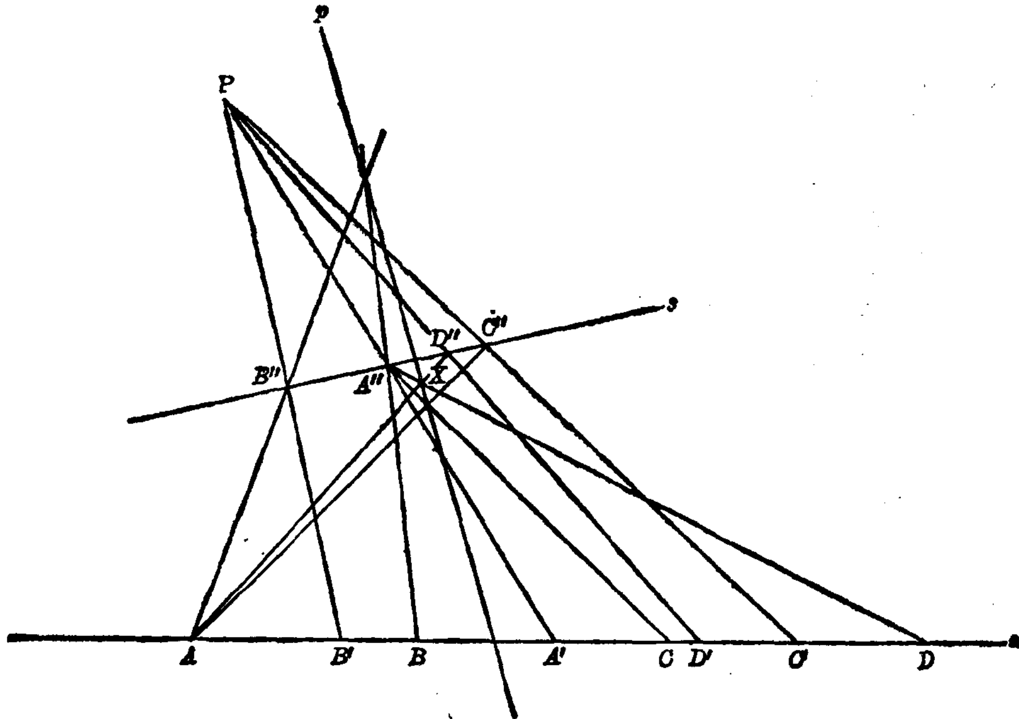


图 5-3

5.2 证明: 一条直线上的点和它们关于这直线上两个不同固定点的调和共轭点间的对应是以这两个固定点为二重点的射影.

证明: 参看图5-4. 设o是所给直线, A和B是o上的固定点, Z_1是o上另一点. 在A上任取两条不同直线$r\neq o$, $s\neq o$, 在Z_1上任取一条不同于o的直线, 它交r于P_1, 交s于R. 令$BP_1\cdot s=S_1$, $BR\cdot r=t\cdot r=Q$, 那么$S_1Q\cdot o=Z_1'$就是Z_1关于A和B的调和共轭点(诚然, 这是通常的作图, 在这里重复是为了对完全四点形的顶点和边引进更适用的符号). 在o上另取一点Z_i, 和上面一样, 用在A上的直线r, s和在B上的直线t重复以上作图. 设$Z_i\cdot R\cdot r=P_i$, $BP_i\cdot s=S_i$, 和$S_iQ\cdot o=Z_i'$, 从

$$o(A, B, Z_i)\overset{B}{\barwedge}r(A, Q, P_i)\overset{B}{\barwedge}s(A, R, S_i)\overset{Q}{\barwedge}o(A, B, Z_i')\text{推出:}$$
$$(A, B, Z_i)\barwedge(A, B, Z_i').$$

这表明A和B是二重点.

5.3 证明: 两个迭置点列间有一个给定二重元素的非恒等射影可表为两个透视的乘积.

证明: 考虑射影

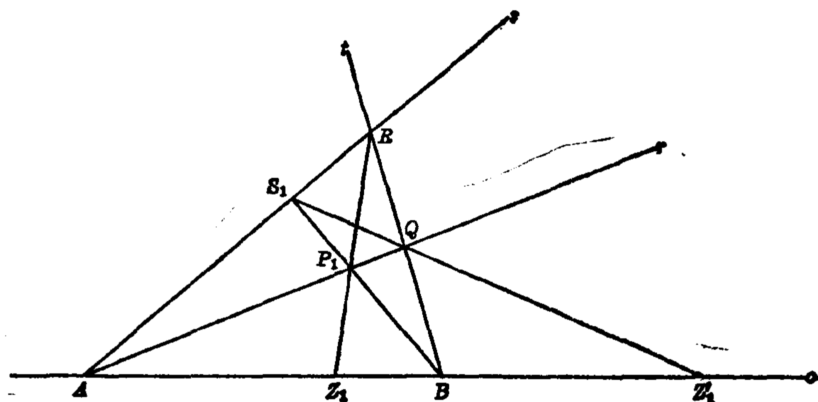


图 5-4

$$o(M,\ A,\ B,\ \cdots)\barwedge o(M,\ A',\ B',\ \cdots),$$

其中 M 是一个二重点，而A, A'; B, B' 是不同的对应点对，且同一点对中的点互不相同. 对于点列 $o(M,\ A,\ B,\ \cdots)$的另一其它点 X, 我们将在只用到两个透视的射影中作出它的对应点 X'.

假定图已经作出，用 R 和 S 记所用到的两个透视中心，使得$(M,\ A,\ B)\overset{R}{\barwedge}(M',\ A_1, B_1)\overset{S}{\barwedge}(M,\ A',\ B')$或$(M,\ A,\ B)\overset{R}{\barwedge}(M_1,\ A_1,\ B_1)\overset{S}{\barwedge}(M,\ A',\ B')$, 那么，或者(1)$M$, R, S 共线而 M, A_1, B_1 不共线，或者(2)M, A_1, B_1 共线而 M, R, S 不共线，或者(3)M, R, S 和 M, A_1, B_1 都共线. 我们将发现(1)和(2)都保证存在不同于 M 的第二个二重点 N, 而当 M 是唯一的二重点时(3)才成立.

情况(1)的解答:

参看图 5-5(a), 在 M 上任取一直线 $q\neq o$, 在 q 上取两个不同点 $R\neq M$ 和 $S\neq M$. 从 R 向 M, A, B 投影，从 S 向 M, A', B' 投影，记 $A_1=RA\cdot SA'$, $B_1=RB\cdot SB'$, $A_1B_1=p$. 对于 o 上任一其它点 X, 设 $RX\cdot p=X_1$, $SX_1\cdot o=X'$, 再设 $p\cdot o=N$, $p\cdot q=T$, 那么，由

$$o(M,\ N,\ A,\ B,\ X)\overset{R}{\barwedge}p(T,\ N,\ A_1,\ B_1,\ X_1)\overset{S}{\barwedge}o(M,\ N,\ A',\ B',\ X')$$

和

$$o(M,\ N,\ A,\ B,\ X)\barwedge o(M,\ N,\ A',\ B',\ X'),$$

推知 X' 是所求的 X 的对应点而 $N\neq M$ 是第二个二重点.

对于 p 也在 M 上的情况，即(3)成立的情况，见图 5-5(b).

情况(2)之对偶的解答:

为了换个类型，我们处理两个迭置线束. 考虑图 5-6(a)中的射影

$$O(m,\ a,\ b,\ \cdots)\barwedge O(m,\ a',\ b',\ \cdots),$$

这里m是二重直线，而 a, a'; b, b' 是不同的对应直线对，且同一对中的直线互不相同. 设 x 是直线束 $O(m,\ a,\ b,\ \cdots)$的另一直线.

在m上任取一点 $P\neq O$, 在 P 上任取两条不同的直线 $a_1\neq m$, $b_1\neq m$, 设 $a\cdot a_1=A$, $a'\cdot a_1=A'$, $b\cdot b_1=B$, $b'\cdot b_1=B'$; $AB=r$, $A'B'=s$, $r\cdot s=Q$, $OQ=n$, $PQ=t$; $x\cdot r=X$, $XP=x_1$, $x_1\cdot s=X'$, $OX'=x'$, 则有

$$O(m,\ n,\ a,\ b,\ x)\overset{r}{\barwedge}P(m,\ t,\ a_1,\ b_1,\ x_1)\overset{s'}{\barwedge}O(m,\ n,\ a',\ b',\ x')$$

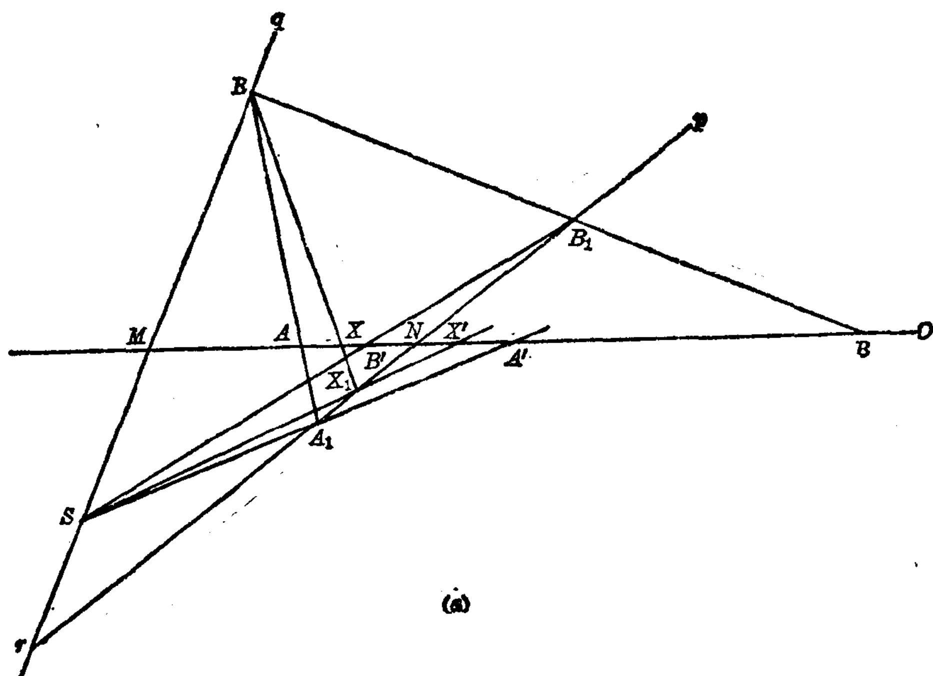


图 5-5(a)

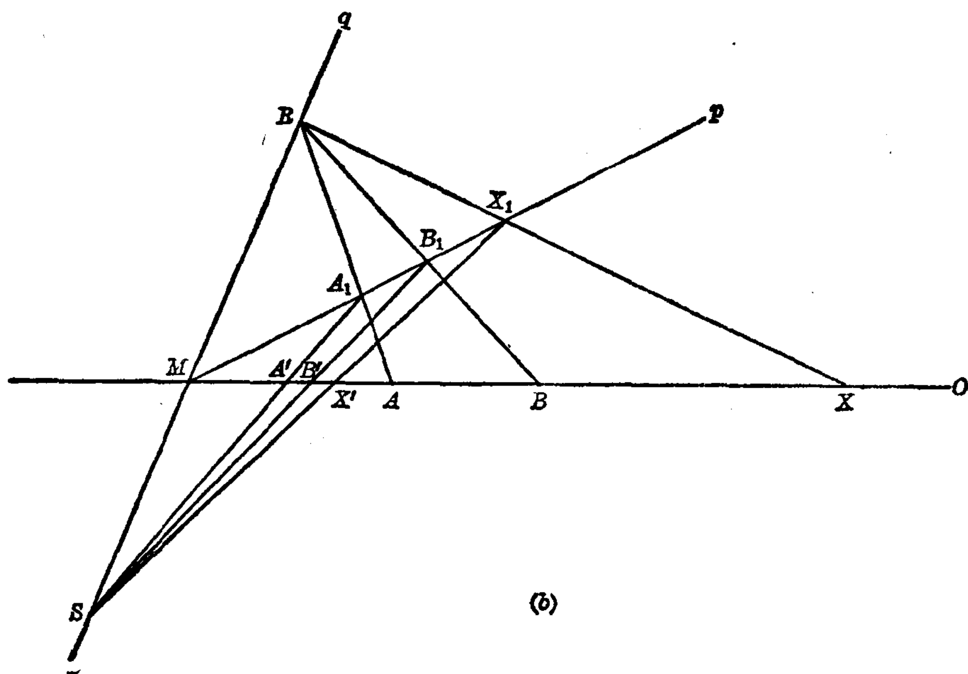


图 5-5(b)

且 $$O(m, n, a, b, x) \barwedge O(m, n, a', b', x').$$

于是，x' 是所求的 x 的对应线而 $n \neq m$ 是第二条二重直线.

对于 Q 也在 m 上，即(3)成立的情况，见图 5-6(b).

5.4 证明：如果 M, N, A, A', B, B' 是不同的共线点，满足 $H(M, N, A, A')$ 和 $H(M, N, B, B')$，则点对 A, A' 不分隔点对 B, B'.

证明：从习题 5.2 我们得到 A, A' 和 B, B' 是反向双曲射影 $(M, N, A, B) \barwedge (M, N, A', B')$ 中的对应点对. 因为 A, A' 和 B, B' 是调和分隔 M, N 的点对，所以这个射影也可

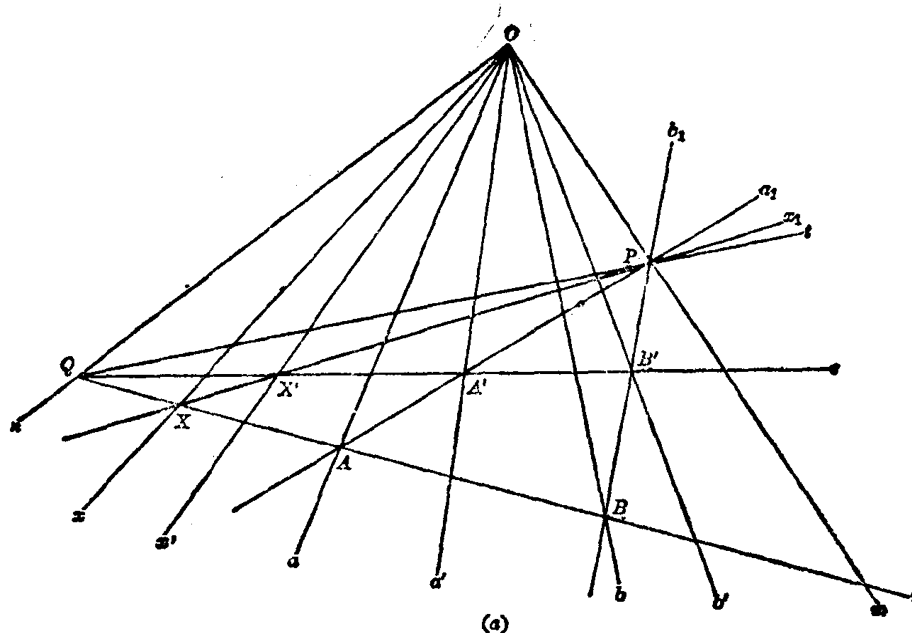


图 5-6(a)

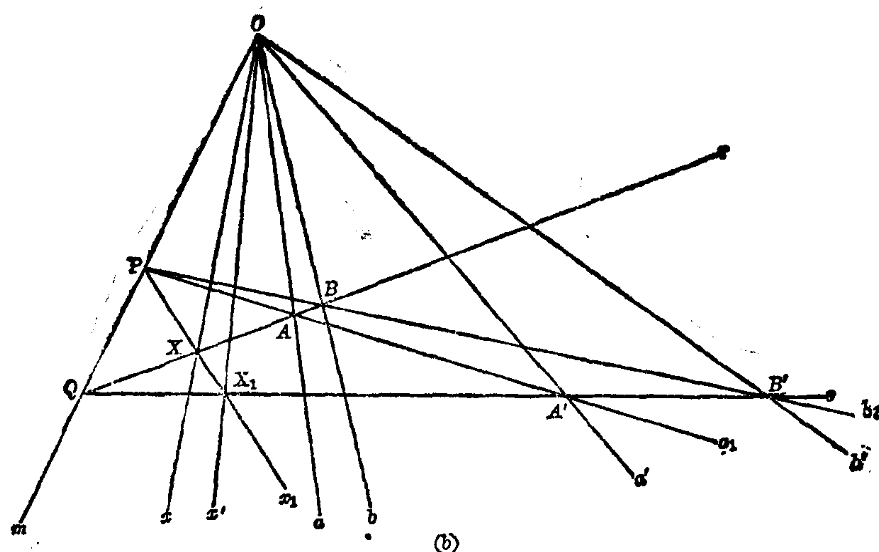


图 5-6(b)

以定义为$(A, B, A')\barwedge(A', B', A)$.

假设点对 A, A' 分隔点对 B, B' 使得这些点在直线上的分布如图5-7所示. 那么, ABA' 和 $A'B'A$ 有相同的方向,从而射影$(A, B, A')\barwedge(A', B', A)$是同向的, 得出矛盾. 所以, A, A' 不分隔 B, B'.

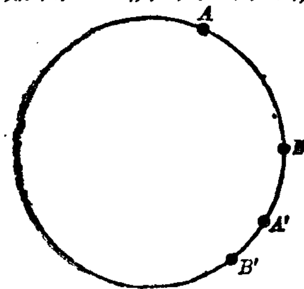


图 5-7

5.5 证明: 有相同二重点 M 的两个抛物射影的乘积或者是恒等射影或者是以 M 为二重点的另一个抛物射影.

证明: 考虑$(M, M, A)\barwedge(M, M, A')$和$(M, M, A')\barwedge(M, M, A'')$的乘积. 显然 M 是这个乘积的二重点. 假设 $B\neq M$ 是第二个二重点. 由于第一个射影不能把 B 变成 B, 它必须具有形式$(M, M, B)\barwedge(M, M, B')$, 其中 $B\neq B'$. 又第二个射影必须把 B' 变成 B, 即必须

具有形式$(M, M, B')\barwedge(M, M, B)$. 但这对乘积是恒等射影. 因此，除非两个给定的抛物射影都是恒等射影,否则它也是以 M 为二重点的抛物射影.

5.6 证明：射影$(M, A, A')\barwedge(M, A', A'')$为抛物射影的充要条件是 $H(M, A', A, A'')$.

证明：考虑图5-8的抛物射影$(M, A, A')\barwedge(M, A, A'')$. 根据作图,完全四点形 $D'D''RS$ 有一组对边在 M 上，另一组对边在 A' 上，第三组对边一条在 A 上，另一条在 A'' 上，所以，$H(M, A', A, A'')$，反过来，如果这个四点形的对边组象图中那样不确定点 M, A', A, A'',那么,$(M, A, A')\overset{R}{\barwedge}(M, D', D'')\overset{S}{\barwedge}(M, A', A'')$. 而且$(M, A, A')\barwedge(M, A', A'')$,因为射影轴在 M 上,所以这个射影是抛物的.

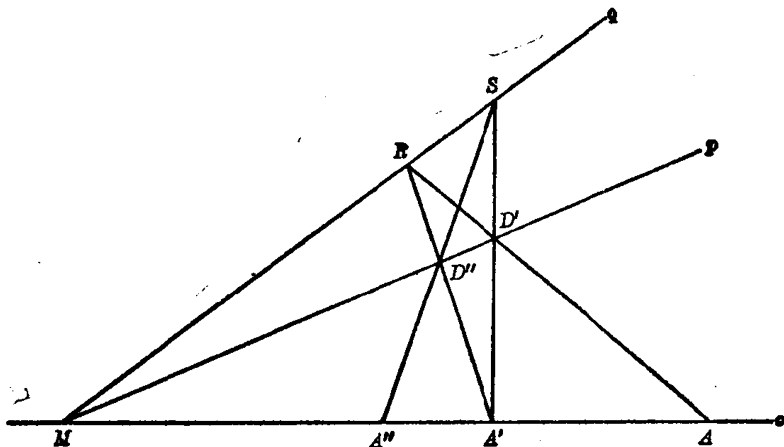


图 5-8

5.7 证明：由$Q(X, Y, Z, X', Y', Z')$可推出$(X, Y, Z, X')\barwedge(X', Y', Z', X)$, 反过来,由$(X, Y, Z, X')\barwedge(X', Y', Z', X)$可推出$Q(X, Y, Z, X', Y', Z')$.

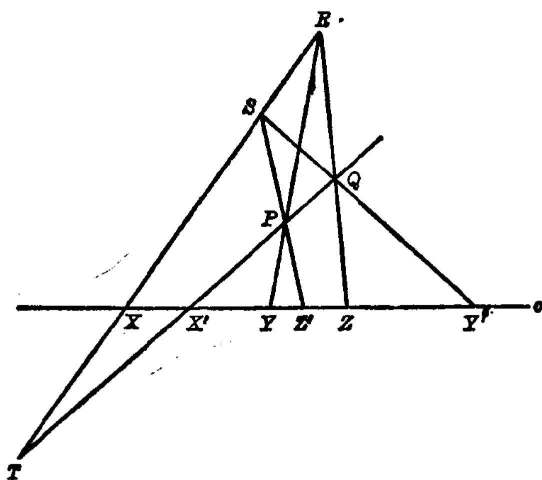


图 5-9

证明：设由完全四点形 $PQRS$ 在 o 上所确定的四点形点集如图 5-9 所示，令 $PQ\cdot RS=T$,那么

$$(X, Y, Z, X')\overset{R}{\barwedge}(T, P, Q, X')$$

$$\overset{S}{\barwedge}(X, Z', Y', X')$$

且 $(X, Y, Z, X')\barwedge(X, Z', Y', X')$.

根据定理 2.10 有

$$(X, Z', Y', X')\barwedge(X', Y', Z', X),$$

所以 $(X, Y, Z, X')\barwedge(X', Y', Z', X)$.

反过来,假定

$$(X, Y, Z, X')\barwedge(X', Y', Z', X),$$

且$Q(X, Y, Z; X', Y', Z'')$. 那么, 如上所述, $(X, Y, Z, X')\barwedge(X', Y', Z'', X)$

从而 $$(X', Y', Z', X)\barwedge(X', Y', Z'', X).$$

但这个射影有三个二重点,所以是恒等射影，于是 $Z'=Z''$

即 $$Q(X, Y, Z, X', Y', Z').$$

§5.3 补 充 题

5.8 在图 5-2 中，设 $p\cdot r=R$, $p\cdot s=S'$; $r\cdot s=P$ 是 r 上一点，$r\cdot s=Q'$ 是 s 上一点．作出上述每一点的对应点．

5.9 在透视 $r(A, B, C, \cdots)\overset{P}{\barwedge}s(A', B', C', \cdots)$ 中，在 r 上另取一点 D，利用三元点组 A, B, C 和 A', B', C' 的巴普斯线作出 D 的对应点 D'．现在的图与图 5-2 的本质区别是什么？

5.10 在习题 5.1 的图 5-3 中：(a) 设 $G=p\cdot o$，确定它的对应点 G'．(b) 设 $o\cdot s=O$ 是 o 上一点，确定它的对应点 O'．

5.11 叙述并证明习题 5.1 的对偶．

5.12 在图 5-6(*a*) 中在 r 上取一点 C，在 S 上取一点 D'，两点都取在 Q 的左边．作出 $c=OC$ 的对应直线 c' 和 $d'=OD'$ 的对应直线 d．

5.13 利用 5-6(*b*) 和习题 5.12 一样作出图形．

5.14 已知一条直线上的不同点 M, A, A', B，作出 B 在射影 $(M, N, A)\barwedge(M, N, A')$ 中的对应点．

5.15 已知一条直线上四个不同的点 M, A, A', B，作出 B 在射影 $(M, M, A)\barwedge(M, M, A')$ 中的对应点．

5.16 证明：如果 $(M, N, A, B)\barwedge(M, N, A', B')$，那么

$$(M, N, A, A')\barwedge(M, N, B, B').$$

5.17 证明：如果 M, A, B, A', B' 是任意五个不同的共线点，那么由 $(M, M, A, B)\barwedge(M, M, A', B')$ 可推出 $Q(M, A, B, M, B', A')$，反之亦然．

5.18 如果 $A, A', A'', A''', \cdots, A^{(m-1)}, A^{(m)}, A^{(m+1)}\cdots$ 是由不同的共线点 M, A, A' 所确定的调和列，证明：

$$H(M, A^{(m)}, A^{(m-1)}, A^{(m+1)}).$$

5.19 已知 $Q(A, B, C, D, E, F)$ 和直线 o 上的另外两个不同的点 M, N，设 A', B', C', D', E', F' 分别是 A, B, C, D, E, F 关于 M, N 的调和共轭点，证明

$$Q(A', B', C', D', E', F').$$

第六章 对　　合

§6.1 基 本 内 容

1. 定　　义

考虑非恒等射影

(i) $O(a, b, c, d, \cdots) \barwedge O(a', b', c', d', \cdots)$. 我们想象在 O 上的每一条直线都有两个标号——一个给定的标号(比如说 a)和一个别号(比如说 d')或者不带撇的符号(比如说 c)和带撇的符号(比如说 a'), 这个射影成对地给出了标号和别号的对应元素; 但是, 在一般情况下, 给定标号 a 的直线和它的对应直线(有别号 a' 的直线)的对应直线是不同的直线.

现在假定(i)仅用给定标号来表示, 比如说

(i') $O(a, b, c, d, \cdots) \barwedge O(c, m, q, a, \cdots)$, 然后, 依次把右边的每一元素用它在这个射影中的对应元素去代替, 再用给定标号表示出来. 作为第二次应用这个射影的结果, 我们有, 比如说

(i'') $O(a, b, c, d, \cdots) \barwedge O(c', m', q', a', \cdots) = O(q, r, u, c, \cdots)$.

一般来说, 如果继续这个步骤, (i')的右端可能永远不会再出现.

在习题 1.6 中, 我们建立了一个特殊的射影, 在这个射影中, a 的对应元素是 $a'=b$, b 的对应元素是 $b'=a$. 而且, 在习题 3.23 中还发现这个事实对每一对对应直线都成立. 在这样的一个射影中, 元素对 a 和 a' 称为*双重对应*(用*互逆对应*更合适), 这种射影称为*对合*. 这样, 一个对合是在点上的直线(在直线上的点)间的一个射影, 它使得对应元素 x 和 x'(X 和 X')互逆.

我们把(i')的右端和左端看作不同的系统, 并分别记为 S_1 和 S_2; 同时把它们元素间的这个一一对应记为 τ, 那么(i')可以表示为 $\tau(S_1)=S_2$, (i'')可以表示为 $\tau(\tau(S_1))=\tau(S_2)=S_3$, 这时 S_3 代表 $O(q, r, u, c, \cdots)$. 当且仅当 $\tau(\tau(S_1))=\tau^2(S_1)=S_1$ 时, 对应 τ 是对合. 更一般地说, 在一点上的直线(一直线上的点)间的非恒等一一对应 τ 是一个对合的充要条件是 τ^2 是恒等对应.

在习题 6.1 中, 我们将证明

定理 6.1 在某一点上的直线间的射影中, 如果直线 a 和它的对应直线 $a' \neq a$ 成互逆对应, 那么任意直线 x 和它的对应直线 x' 也成互逆对应.

作为一个推论, 我们有:

定理 6.2 一个对合由它的任意两对互逆元素所确定. (其图见习题 6.2).

对合的互逆元素对有时也称为共轭对. 我们保留这个术语以备后面使用. 现在仍继续称作互逆对.

在习题 6.3 中, 我们将证明

定理 6.3 完全四点形的三组对边被不在其顶点上的任一条直线 o 所截；得到在 o 上的点之间的某一个对合的三对互逆对. 如果直线 o 又不在这四点形的对边点上，那么每一对互逆对都由不同的点组成.

它的对偶是

定理 6.3′ 完全四线形的三组对顶点与不在其边上的一点 O 相连，得到在 O 上的直线之间的某一个对合的三对互逆对. 如果点 O 又不在这四线形的对角线上，那么每一对互逆对都由不同的直线组成.

这两个定理提供了由两对不同的互逆元素确定的对合的又一作图法.

因为定理 6.3 的六个点构成一四点形点集，所以我们证明了第五章最后一节末尾的命题.

定理 6.4 如果直线 o 交三角形 PQS 的边 PQ, PS, SQ 于点 A', B', D'；A', B', D' 连同 o 上另外三点 A, B, D 一起成为在 o 上的点之间的某个对合的三对互逆对，则直线 AS, BQ, DP 共点.

这个定理是显然的，因为这六个点构成一四点形点集 $Q(A, B, D; A', B', D')$，在习题 6.4 中给出了一个独立的证明.

2. 二重元素

在直线 o 上取三个不同点 M, N, X，并作出 X 关于 M 和 N 的调和共轭点 X'. 如果 M, N 保持固定而 X 描出这条直线，则所得的射影 $X \barwedge X'$ 是以 M, N 为二重点的一个对合. 这个对合自然称为**双曲对合**. 因为对合由它的二重点唯一确定，同时由 $(M, N, X, X') \barwedge (M, N, X', X)$ 可推出 $H(M, N; X, X')$. 我们就证明了

定理 6.5 每一个双曲对合都只是关于二重点的调和共轭点对间的一个对应.

由此推出

定理 6.6 每一个双曲对合都是反向的.

在习题 6.5 中，我们将证明

定理 6.7 如果一个对合有一个二重元素，则它也有第二个二重元素，它满足：(a) 与第一个二重元素不同；(b) 是第一个二重元素关于任意互逆对的调和共轭.

作为一个直接推论，我们有

定理 6.8 不存在抛物对合.

根据定理 6.6，双曲对合不存在互相分隔的两对互逆对. 这样，由两对互相分隔的互逆对 A, A' 和 B, B' 确定的对合（例子见习题 1.5）是**椭圆对合**. 因为对合是一种特殊的射影，这就肯定了椭圆射影的存在. 我们还有

定理 6.9 每一个同向对合都是椭圆对合.

3. 对合对

考虑在一条直线上的点间的两个对合 I_1 和 I_2，我们的目的是探讨这些对合有一个公共的互逆对 A, A' 的可能性.

首先，假定这些对合是双曲的：I_1 以 M_1, N_1 为二重点，I_2 以 M_2, N_2 为二重点. 用 I_3 表示以 M_1, N_1 和 M_2, N_2 为互逆对的对合，如果 I_3 是双曲的，则存在点 M_3, N_3（I_3 的二重

点)使得 $H(M_3, N_3; M_1, N_1)$ 和 $H(M_3, N_3, M_2, N_2)$. 因此, M_3, $N_3=M_3'$ 既是 I_1 的互逆对,又是 I_2 的互逆对. 然而,如果 I_3 是椭圆的,则 M_3, N_3 都不存在. 于是则有

定理 6.10 一条直线上的点之间的两个双曲对合有公共互逆对 A, A' 的充要条件是它们的二重点不互相分隔.

其次,假定 I_1 是椭圆的, I_2 是双曲的, 以 $\pi_3=I_1I_2$ 表示 I_1 和 I_2 顺次作用后所得直线的点间的射影. 例如,设 I_1 把点 X 变到 X', I_2 把 X' 变到 X'',则有 I_1I_2 把 X 变到 X''. 如果 I_1 和 I_2 有公共互逆对 A, A', 则若 I_1 交换 A, A', 而 I_2 又把它们恢复到原来的顺序. 这样, A, A' 就是射影 π_3 的二重点. 于是,问题就归结为确定 π_3 是否是双曲的. 因为 I_1 是同向的, I_2 是反向的; 显然 π_3 是反向的. 从而 π_3 的二重点是公共互逆对. 我们就有

定理 6.11 在一条直线上的点间的两个对合如果一个是椭圆的, 另一个是双曲的, 则它们总有一公共互逆对.

最后,假定 I_1 和 I_2 都是椭圆的,设 I_1 的互逆对 A, A' 被 I_2 变到 A'', A''', 不妨假设这些点在直线上的分布情况如下:

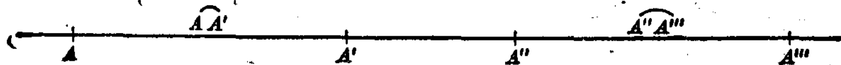


图 6-1

当动点 X 在 AA' 上从 A 移动到 A' 时, 它在射影 $\pi_3=I_1I_2$ 下的对应点在 $\overset{\frown}{A''A'''}$ 上朝同一方向移动,即从 A''' 到 A''. 又因为 $\overset{\frown}{AA'}$ 包含在 $\overset{\frown}{A''A'''}$ 中, 所以 X 和 X' 必须重合于 $\overset{\frown}{AA'}$ 上的某一点,这一点作为 π_3 的二重点也是 I_1 和 I_2 的公共互逆对的一个点. 于是有

定理 6.12 在一条直线上的点间的两个椭圆对合总有公共互逆对.

在习题 6.6 中,我们将证明

定理 6.13 如果对合

$$I_1: (A, A', B, B') \barwedge (B', B, A', A)$$

和

$$I_2: (A, A', B, B') \barwedge (A', A, B', B)$$

有公共互逆对 M, N,则有 $I=I_1 \cdot I_2$ 是以 M, N 为二重点的一个对合.

§6.2 问题及其解

6.1 证明: 在一点上的直线间的射影中, 如果直线 a 和它的对应直线 a' 成互逆对应, 则任意直线 x 也和它的对应直线 x' 成互逆对应.

证明: 给定在点 O 上的直线间的射影 $x \barwedge x'$, 其中 a, a' 是互逆对应. 于是: $(a, a', x) \barwedge (a', a, x')$. 即我们要证明 $(a, a', x, x') \barwedge (a', a, x', x)$.

如图 6-2, 任取一条不在 O 上的直线 r, 并在 a 上任取一个不同于 O 及 $a \cdot r$ 的点 A, 在 A 上作直线 a_1', x_1, x_1', 使得 $(a_1', x_1, x_1') \overset{r}{\barwedge} (a', x, x')$.

设 $a' \cdot a_1' = A'$, $x' \cdot x_1 = V$, $A'V = v$ 则:

$$(a, a', x, x') \overset{r}{\barwedge} (a, a_1', x_1, x_1') \overset{x}{\barwedge} (a', a_1', v, r) \overset{x_1}{\barwedge} (a', a, x', x),$$

因此有

$$(a, a', x, x') \barwedge (a', a, x', x)$$

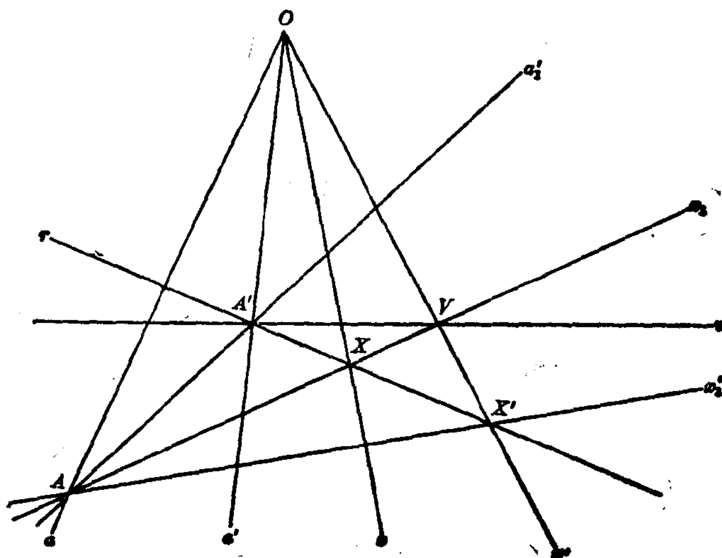


图 6-2

6.2 在一直线上的点对合中，已知两对互逆点对，试作出这个对合.

解：设图6-3中直线 o 上的两对互逆点对是 A, A' 和 B, B', C 为 o 上另一点，我们来作出 C 在对合中的对应点 C'. 任取不在 o 上的一点 R, 在 A 上任取一条异于 o 且不在 R 上的直线 a, 在 a 上确定四点 A_1', B_1, B_1', C_1, 使得：

$$(A_1', B_1, B_1', C_1)\overset{R}{\barwedge}(A', B, B', C).$$

设 $B'B_1\cdot A'R=V$, $B'C_1\cdot A'R=W$, $B_1W\cdot o=C'$, 则 C' 即为所求的点，这是因为$(A, A', B, B', C)\overset{R}{\barwedge}(A, A_1', B_1, B_1', C_1)\overset{B'}{\barwedge}(A', A_1', V, R, W)\overset{B_1}{\barwedge}(A', A, B', B, C')$.

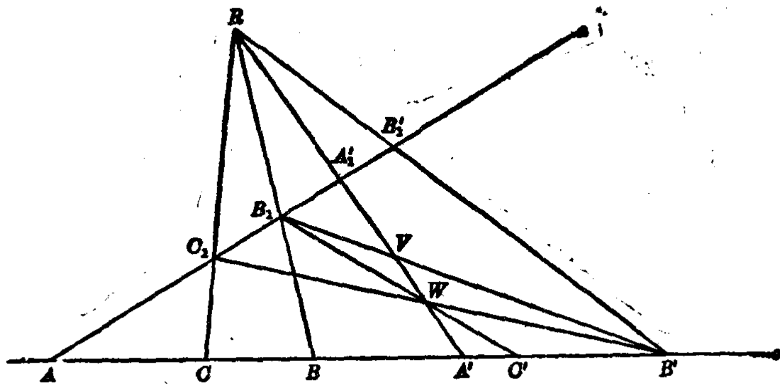


图 6-3

6.3 证明：完全四点形三对对边被一条不过其顶点的直线 o 所截，得到直线 o 上的点间的一个对合中的三对互逆对.

证明：利用图6-4,我们有

$$(A, A', B', D')\overset{S}{\barwedge}(A'', A', P, Q)\overset{R}{\barwedge}(A, A', D, B),$$

所以

$$(A, A', B', D')\barwedge(A, A', D, B).$$

根据定理2.10

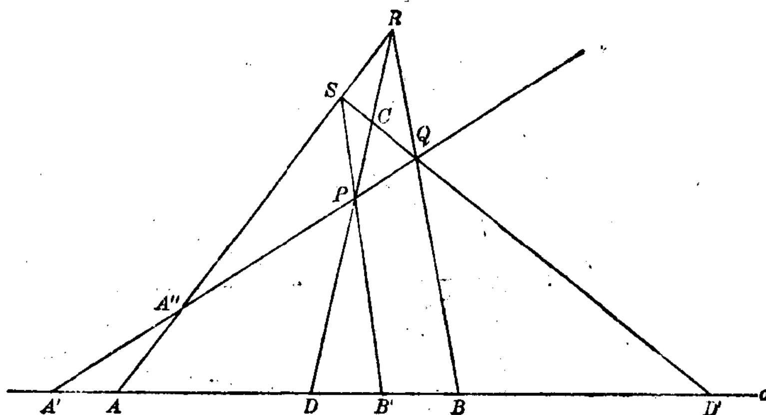


图 6-4

$$(A, A', D, B) \barwedge (A', A, B, D),$$

所以
$$(A, A', B', D') \barwedge (A', A, B, D).$$

因为 A, A' 是互逆对,根据定理 6.1 的对偶,这个射影是以 B, B' 和 D, D' 为互逆对的一个对合.

6.4 证明:如果直线 o 与三角形 PQS 三边 PQ, PS, SQ 交于点 A', B', D',它们和 o 上的另外三点 A, B, D 是 o 上一个对合中的三对互逆对,则直线 AS, BQ, DP 共点.

证明:在图 6-4 中,设 $AS \cdot BQ = R$,且 $RP \cdot o = D_1$,根据定理 6.3 有

$$(A, A', B', D') \barwedge (A', A, B, D_1).$$

由题设,又有

$$(A, A', B', D') \barwedge (A', A, B, D),$$

于是,根据基本定理,$D_1 = D$,且 DP 在 R 上.

6.5 证明:如果一个对合有一个二重元素,那么它也有第二个二重元素,满足:(a)与第一个二重元素不同;(b)是第一个二重元素关于任一互逆对的调和共轭.

证明:考虑一条直线的点之间的一个对合.图 6-5 中直线 o 上的对合由二重点 M 和任一互逆对 B, B' 确定.在 M 上取两条不同的直线 r 和 s,它们都异于 o;在 r 上任取一点 $P \neq M$,设 $BP \cdot s = Q$, $B'P \cdot s = S$, $BS \cdot B'Q = R$, $PR \cdot S = K$, $PR \cdot o = N$.

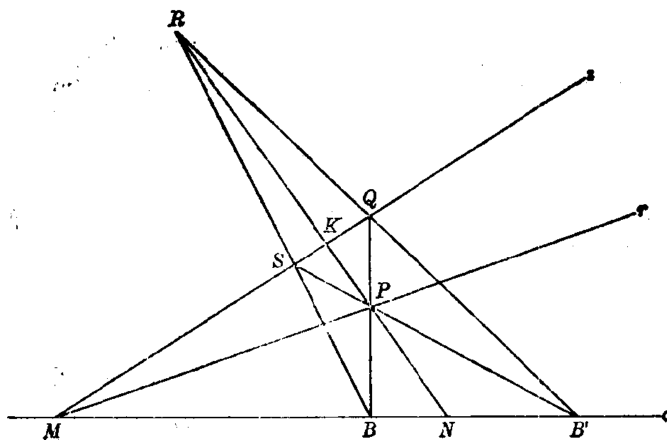


图 6-5

(a) 那么，$(M, N, B, B')\overset{P}{\barwedge}(M, K, Q, S)\overset{R}{\barwedge}(M, N, B', B)$
表明 $N\neq M$ 为第二个二重点.
(b)在 o 上任取一不同于 M, N, B, B' 的点 C. 设 $CP\cdot s=T$, $RT\cdot o=C'$(此处作图留给读者). 根据作法，点对 C, C' 调和分隔 M, N，由定理 4.4，点对 M, N 又调和分隔 C, C'. 显然 C, C' 是本题中的对合的任一互逆对. (注：(b)的图形在习题 6.16 中有用.)

6.6 证明：若对合 I_1: $(A, A', B, B')\barwedge(B', B, A', A)$ 和 I_2: $(A, A', B, B')\barwedge(A', A, B', B)$ 有共同的互逆对 M, N，则 $I=I_1\cdot I_2$ 是一个以 M, N 为二重点的对合.

证明：因为 I_1 将 A 变成 B', I_2 将 B' 变成 B, 所以 I 将 A 变为 B. 同理可知 I: $(A, A', B, B')\barwedge(B, B', A, A')$ 是一个对合. 因为 I_1, I_2 都把 M, N 互换，所以 I 将 M 变为 M, N 变为 N，即 M, N 为 I 的二重点.

§6.3 补 充 题

6.7 证明：若双曲射影中有一对对应元素关于二重点调和共轭，则此射影为对合.

6.8 已知：(a)二重直线 m, n, (b)二重直线 m 和互逆线对 a, a', 求作一点上的直线间的对合.

6.9 证明：若直线上的两对点不互相分隔，则存在唯一一对点调和分隔上述每一对点.

6.10 证明：若 $H(A, B; D, D')$, $H(B, D; A, A')$, $H(D, A; B, B')$，则 $Q(A', B', D'; A, B, D)$.

提示：考虑图 4-8 中的四边形 $CEFG$.

6.11 证明：六个共线点 A, A'; B, B'; D, D' 是一个对合中的三对互逆对的充要条件是：$(A, B, D, A')\barwedge(A', B', D', A)$ 或 $(A, B, D, B')\barwedge(A', B', D', B)$ 或 $(A, B, D, D')\barwedge(A', B', D', D)$.

6.12 已知图 6-6 的三角形，设 a', b', c' 是分别过顶点 A, B, C 的三条不同直线，p 是不同于 $a, b, c; a', b', c'$ 的任一直线. 又设 $a\cdot p=A'$, $b\cdot p=B'$, $c\cdot p=C'$; $a'\cdot p=A''$, $b'\cdot p=B''$, $c'\cdot p=C''$. 证明：a', b', c' 共点的充要条件是 $Q(A', B', C'; A'', B'', C'')$.

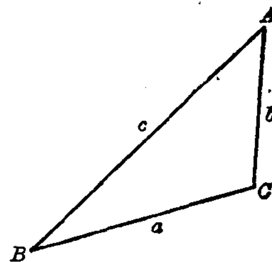


图 6-6

提示：先假定 a', b', c' 共点于 P，这时，考察完全四点形 $ABCP$；再假定 a', b', c' 不共点，这时令 $b'\cdot c'=P$, $AP=a''$, $a''\cdot p=A'''$.

6.13 叙述并证明习题 6.12 的对偶.

6.14 证明：若 p 是射影 $r(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\barwedge s(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)$ 的巴普斯线，且 $s(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\overset{P}{\barwedge}r(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)$，证明：$r(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)\barwedge r(A_3, B_3, C_3, D_3, \cdots)$ 是一个对合的充要条件是 P 在 p 上，叙述并证明它的对偶.

6.15 证明：直线上点之间(点上直线之间)的任何射影都可表为两个对合的乘积.

提示：设射影 π 将 A 变为 A'，将 A' 变为 A''，定义 I_1: $(A', A, A'')\barwedge(A', A'', A)$ 和 $I_2=$

$I_1 \cdot \pi$, $I_1 \cdot I_2 = \pi$.

6.16 证明：若 $H(M, N; B, B')$ 和 $H(M, N; C, C')$，则 M, N 是对合 $(B, C, B', C') \barwedge (C, B, C', B')$ 的互逆对.

提示：见习题 6.5 的注.

6.17 已知直线 o 上一个对合 $(A, A', B) \barwedge (A', A, B')$ (a) 写出定理 6.3 所指出的 o 上任一点 C 的对应点 C' 的作法. (b) 设 D 为 o 上又一点，按上述步骤作出它的对应点；也可利用习题 6.2 中的图来作.

第七章　平面射影几何公理

§7.1　基 本 内 容

1. 引　　言

平面射影几何只涉及那些在一个或多个中心射影和截影下保持不变的平面图形的性质. 到目前为止,在粗略地了解历史发展过程的同时,我们的陈述只着眼于欧氏几何中除去所有与度量有关的定理后所剩下的那些内容. 要摒弃度量概念方法之一是为射影几何建立一个基础,也就是说,建立一个与欧氏几何任何概念完全无关的公理系统. 我们现在打算用总共十一条公理来达到这个目的.

构造射影几何的公理系统相对来说是一个新的发展. 对于这样一个系统,要求其中的公理是简单的和独立的、即没有一条公理可由其它公理推出. 最要紧的是这些公理必须相容,也就是说,它们既不能互相抵触,也不能推出相互矛盾的定理. 我们可以从第一章中的那些有用的系统中的某一个开始,然而,看来较好的方法是我们首先得到一些希望证明的以及必须假定的概念(因为并非每一个事物都能证明).

很明显,在平面射影几何中,我们需要两种对象——它们分别称为点和直线——和一个"在上"关系,它使得每两个不同点在且只在一条直线上,以及每两条直线在且只在一个点上,我们还必须假定或能够证明笛沙格双三角形定理、巴普斯定理及其特殊情况,完全四点形的对边点的不共线性以及基本定理(定理28).

2. 最初的公理

我们从两个非空集(分别称为点集和直线集)和"在上"关系着手,它们适合:

公理1　如果 A 和 B 是不同的点,则至少有一条直线在这两点上.

公理2　如果 A 和 B 是不同的点,则至多有一条直线在这两点上.

公理3　如果 p 和 q 是两条不同的直线,则至少有一点在这两条直线上.

公理4　在任一直线上至少有三个不同点.

公理5　不是所有的点都在同一直线上.

注意到这里并没有试图给称为点和直线的"事物"下定义,也没有对"在上"关系下定义. 由于这些集合非空,我们知道至少存在一个点和一条直线. 除此之外,我们仅有的其它知识都是由这些公理和由这些公理推出的"事物"(定理)给出.

3. 对 偶 原 则

在习题 7.1～7.3 中,我们将证明:

定理7.1　如果 p 和 q 是不同的直线,那么至多有一个点在这两条直线上.

定理 7.2　不是所有的直线都在同一点上.

定理 7.3　在任一点上至少有三条不同的直线.

现在我们有了八个事实，给它们适当配对——公理 1 和 3，公理 2 和定理 7.1，公理 4 和定理 7.3，公理 5 和定理 7.2——以后构成了四个命题和它们的对偶. 这样到现在为止，在我们的几何中对偶原则是成立的. 当我们继续讨论时必须注意保持这个性质.

4. 在一条直线上的点的个数

根据公理 4 和定理 7.3，在每一条直线上至少有三个点，在每一个点上至少有三条直线，会不会出现某一条直线上的点比另一条直线上的点多，从而某一点上的直线比另一点上的直线多的情况呢？下述定理（证明见习题 7.4～7.5）排除了这样一种混乱状况.

定理 7.4　如果在某一条直线 p 上恰好有 $n(n\geqslant 3)$ 个不同点，则在每一条直线上都恰好有 n 个不同点.

定理 7.5　如果在任一直线上恰好有 n 个不同点，则总共有 n^2-n+1 个不同点.

这些定理的对偶是：

定理 7.4′　如果在某一点 p 上恰好有 $n(n\geqslant 3)$ 条不同直线，那么在每一点上都恰好有 n 条不同直线.

定理 7.5′　如果在任一点上都恰好有 n 条不同直线，那么总共恰好有 n^2-n+1 条不同直线.

这些当然是根据对偶原则推出的. 然而，我们建议读者对每一个都给出一个独立的证明.

5. 公理的相容性

现在了解一下是否存在我们这个系统的模型也许是应该的. 为了建造一个模型，我们取两个具体对象的非空集，规定一个集中的元素为点，另一个集中的元素为直线，并且这样规定“在上”关系使得我们的公理在所提出的模型中成为可证明的命题（定理）.

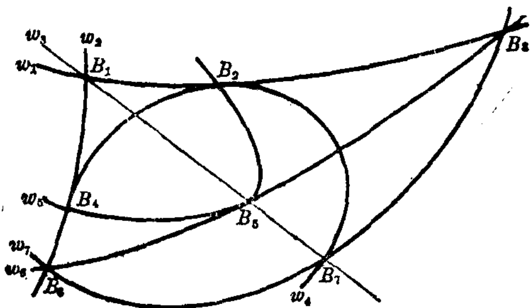


图 7-1

例 7.1　考虑图 7-1 中由七个小珠 $B_1, B_2, B_3, \cdots B_7$，三个一串，组成的七条线 $W_1, W_2, W_3, \cdots, W_7$ 所构成的装饰品，规定小珠为点，线为直线. 设 B_i 在 W_j 上（同样地，W_j 在 B_i 上）代表小珠 B_i 被串到线 W_j 上. 剩下的工作是验证所有的公理或者否定其中至少一条.

公理 1 和 2 的验证　两个不同点的选法共有 $C_7^2=21$ 种——$B_1, B_2; B_1, B_3; \cdots; B_1, B_7; B_2, B_3; B_2, B_4; \cdots B_2, B_7; \cdots B_6, B_7$. 首先，我们检验 B_1 和 B_2 是否在某条直线上：它们在直线 W_1 上. 然后，我们检验 B_1, B_2 是否不在其它的直线上：它们不在. 以这种方式继续对每一对这样的点进行检验，最后我们可以下结论说：如果 X 和 Y 是不同的点，那么它们至少在也至多在一条直线上.

公理 4 的验证　七条直线上的每一条上都恰好有三个点，因此在每一条上至少有三个点，分布如下：

W_1: B_1, B_2, B_3. W_2: B_1, B_4, B_6. W_3: B_1, B_5, B_7. W_4: B_2, B_4, B_7.

W_5: B_3, B_4, B_5. W_6: B_2, B_5, B_6. W_7: B_3, B_6, B_7.

公理 3 的验证 检验每一对直线(有 21 对)至少有一个公共点.

公理 5 的验证 这一条很容易验证,因为共有七个点,而在任一条直线上仅有三个点.

这样,就构造出了我们系统的一个模型.

模型存在的重要性在于这样一个事实:如果公理不相容,那么不可能有模型存在,我们现在可以下结论说,公理1～5构成一个相容系统.

类似地能够证明,如果规定线为点,小珠为直线,同时"在上"的定义同前.此装饰品仍然是公理系统的模型.你预料过这种情况吗?

当任一直线上恰好有三个点时,总共就恰好有 $3^2-3+1=7$ 个点(定理 7.5). 7 个点的几何称为 7 点几何.

例 7.2 使用一个恰好由两个元素——0 和 1——所构成的数系,其加法表和乘法表如下:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

考虑所有的三元数组(x_1, x_2, x_3)的集合,这里每一个 x 不是 0 就是 1. 它共有八个三元数组,但是我们将发现三元数组(0, 0, 0)是没有用的,剩下的七个三元数组(把它们规定为点)是:

$$A=(0, 0, 1) \quad B=(0, 1, 0)$$
$$C=(1, 0, 0) \quad D=(0, 1, 1)$$
$$E=(1, 0, 1) \quad F=(1, 1, 0)$$
$$G=(1, 1, 1)$$

把所有形如 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

的方程取为直线,这里 a_i 取值 0 或 1,只是除掉 $0x_1+0x_2+0x_3=0$,它们是

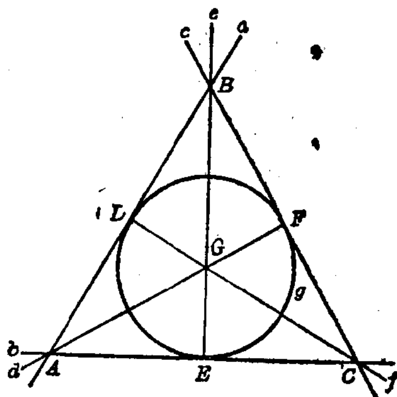


图 7-2

a: $x_1=0$, b: $x_2=0$, c: $x_3=0$, d: $x_1+x_2=0$,

e: $x_1+x_3=0$, f: $x_2+x_3=0$, g: $x_1+x_2+x_3=0$.

最后,当且仅当某个三元数组满足某个方程时,我们说这个三元数组所代表的点在这个方程所代表的直线上(这条直线在这个点上). 为了验证这些公理,我们确定每一条直线上的点如下(记住这里有 $1+1=0$):

a: A, B, D, b: A, C, E, c: B, C, F, d: A, F, G,

e: B, E, G, f: C, D, G, g: D, E, F.

公理 1 和 2 的验证 检验每一对点 A, B; A, C; …; F, G 在且只在一条直线上.

公理 3 的验证 检验每两条直线有一个公共点.

公理 4 和 5 的验证 显然.

作为一个图解,见图 7-2,这里除去线 g 以外,每条线都取作直线.

这两个例子中的模型有许多不同点,在一个模型中有一个小珠集和一个线集,在另一个模型中有一个三元数组集和一个线性方程集. 图 7-1 和图 7-2 在外形和美感等方面也有不

同．然而，把例 7.1 中 7 点几何的每一点和每一条线与例 7.2 的点和线适当联系起来以后，我们下面将证明从一个系统得出的命题也能适用于另一个系统，因而我们说这两个几何是**同构的**．也就是说，它们的差别(不管这些差别是什么)在几何上是无关紧要的．

让我们把

B_1 与 A　B_2 与 E　B_3 与 C　B_4 与 D　B_5 与 G　B_6 与 B　B_7 与 F

以及　w_1 与 b　w_2 与 a　w_3 与 d　w_4 与 g　w_5 与 f　w_6 与 e　w_7 与 c

联系起来，在图 7-1 中，我们发现，例如线 w_1 与 w_7 以 B_3 为公共点，同时在图 7-2 中它们的对应元素 b 和 c 以 B_3 的对应点 C 为公共点．如同第一章中那样定义透视和射影之后，在图 7-1 中我们也有：

(i) $w_3(B_1, B_5, B_7) \overset{B_2}{\underset{\wedge}{=}} w_2(B_1, B_6, B_4) \overset{B_3}{\underset{\wedge}{=}} w_3(B_1, B_7, B_5)$,

从而　$(B_1, B_5, B_7) \;\overline{\wedge}\; (B_1, B_7, B_5)$.

把(i)中的每一点和每一条线都换成它们的对应元素，我们有：

(i′) $d(A、G、F) \overset{E}{\underset{\wedge}{=}} a(A, B, D) \overset{C}{\underset{\wedge}{=}} d(A, F, G)$,

从而　$(A, G, F) \;\overline{\wedge}\; (A, F, G)$.

图 7-2 中的(i′)留给读者去证明．这两种 7 点几何显然是同构的．通常我们说：只有一种 7 点几何，它的意思是，任何两种 7 点几何都是同构的．

在习题 7.6 中，我们将给出在每一条直线上恰好有四个点的 13 点几何的模型．看一看，使我们就会发现，在那里和例 7.2 中里采取的步骤能够推广，从而为在任一直线上恰好有 n 个点(n 为任意自然数)的几何提供一种模型．在构造数组时所用到的有限集 $\{0, 1\}$ 和 $\{0, 1, 2\}$ 在加法和乘法方面与有理数集和实数集有某些共同的性质．在代数定理中证明了，自然数除以 m 后的剩余集合 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, m-1\}$ 有这些性质(即构成域)的充要条件是 m 是素数．这里重要的一个性质是：如果 $a\cdot b=0$，那么 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $a=b=0$，当 $m=4$ 时，剩余集 $\{0, 1, 2, 3\}$ 没有这种性质，因为当 $a=2\neq 0$ 和 $b=2\neq 0$ 时，我们有 $a\cdot b=0$．可以证明，习题 7.6 能推广到为在一条直线上恰有 n 个点的几何提供模型的充要条件是 $n-1$ 是素数．

在习题 7.10 中，我们将给出在每一直线上都有无穷多个点的一个几何模型．到目前为止，我们的公理系统对于在任一直线上都有有限个点或无穷多个点的情况都是相容的．

6．补充的公理

我们这一章的目的是建立一套公理，使得前面各章的定理都能由此推出．考虑到第一章中定义的射影直线，我们发现，直线上的点必须与全体实数再添上 ∞ 成一一对应．

从前面各章可以推出平面射影几何的关键性的定理当然是——正如其名称所暗示的——基本定理．例如，我们已经看到由基本定理推出巴普斯定理，由巴普斯定理推出笛沙格双三角形定理，由笛沙格定理又推出巴普斯定理的特殊情况．不把基本定理作为公理是由于它很难叙述成简单的形式．这些定理中最简洁的是笛沙格双三角形定理，基于这个理由，我们添加

公理 6　如果两个三角形通过一点成透视对应，则它们也通过一条直线成透视对应(其

对偶的证明见习题7.1)．我们还需要

公理7 完全四点形的对边点恒不共线.

在7点几何中我们发现任一完全四点形的对边点是共线的．于是公理7排除了对这种几何作进一步研究．然而公理6和7在13点和31点几何中都是可证明的定理.

公理7使得我们可以在直线上引进调和集和调和网，命 $R(A, B, C)$ 是直线 p 上的调和网，p' 是平面的另一条直线，且 $p\cdot p'=0$．设 $P\neq 0$ 是 p 上一点，$P'\neq 0$ 是 p' 上一点；命 R 是 PP' 上不同于 P 和 P' 的一点．现在可以由透视 $p(A, B, C)\overset{R}{\underset{\wedge}{=}}p'(A', B', C')$ 确定 p' 上的点 A', B', C'．因此这个透视把 p 上的任一调和集变成 p' 上的调和集，所以它把 p 上的调和网 $R(A, B, C)$ 变到 p' 上的调和网 $R(A', B', C')$．这样，在平面的一条直线上存在调和网就保证了在这平面的每一条直线上存在调和网.

当直线上的点的个数有限时，这条直线上调和网的元素的个数也是有限的．因而由 $H(S, T, U, V)$ 不能推出点对 S, T 被点对 U, V 所分隔(分隔的定义见第四章)．在习题17.17(b)和17.20(a)中将对13点和31点几何证明这种情况．关于"分隔"连同它的衍生物一起在我们想要建立的几何中所起的一个重要作用．因此，我们通过三个公理来引进这种关系.

公理8 如果 $H(A, B, D, E)$，那么点对 A, B 和 D, E 互相分隔.

公理9 如果点对 A, B 和 D, E 互相分隔，那么，A, B, D, E 是不同点.

公理10 如果点对 A, B 和 D, E 互相分隔，点对 A, E_1 和 B, E_2 互相分隔，那么点对 A, B 和 D, E_2 互相分隔.

这些公理，排除了对在一条直线上只有有限个点的几何作进一步研究，定理7.6将表明这一点.

定理7.6 在满足公理1～10的任何射影几何中，任一直线上都有无穷多个点(证明见习题7.12).

在定理7.6的证明中所得到的一点的无穷性质严格地说是调和网的性质．网中元素(见第四章)可与全体有理数集的元素成一一对应．当(根据假定)这个调和网的点构成这条直线上的全体点时，我们就有了所谓的*平面有理射影几何*．在这种几何中，在一条直线上保持了任意三个不同点固定不变的射影也就保持了其中任何一点关于其它两点的调和共轭不变．因此，也就保持了 $R(A, B, C)$ 的每一点不变，即这条直线上的每一点不变，我们把这个事实陈述为：

引理 如果一个射影使得有理射影平面的一条直线的三个不同点都不变，则它使得这条直线的每一点都不变.

在习题7.13中，我们将证明

基本定理 在有理射影平面中给定三个不同的共线点 A, B, C 和另外三个不同的共线点 A', B', C' (这两组点可在同一直线上或不同直线上)，则存在唯一一个射影把三元点组 A, B, C 分别变到三元点组 A', B', C'.

在代数中，有理数集能通过对单位数1进行有理运算而得到，有理数集能通过一种构造法(戴德金分割)或假定存在无限不循环小数而扩大为实数集．这些无限不循环小数和有理数一样遵循相同的运算法则．直线上的有理点集我们已给从这直线上的一个三元点组出发

通过调和集得到，这个有理点集还可以通过一种构造法或通过下列公理拓广为直线上的全体实数集.

公理 11 存在一条射影直线，它上面的全体点与扩大了的实数系成一一对应且有一个分隔点系，A，B 分隔 C，D 的充要条件是 $(A, B, C, D)<0$ 使得公理 1～10 都满足.

§7.2 问题及其解

7.1 证明：如果 p 和 q 是不同的直线，那么至多有一点在这两条直线上.

证明：根据公理 3，至少有一点同时在 p 和 q 上，不妨设是 R，假定还有第二个点 $S\neq R$ 同时在 p 和 q 上，那么在不同的点 R 和 S 上有两条不同的直线，这与公理 2 矛盾.

7.2 证明：并不是所有的直线都在同一点上.

证明：设 p 是一点，q 是一条直线．如果 p 不在 q 上，命题已经得证．现在假设 p 在 q 上，设 $Q\neq p$ 是 q 上的另一点(公理 4)，R 是不在 q 上的一点(公理 5)，则 $R\neq Q$(为什么?) 所以，根据公理 1，存在一条直线 $p=QR$，既在 Q 上又在 R 上，因为 $pq=Q$，$P\neq Q$，所以 p 不在 P 上(定理 7.1).

7.3 证明：在任一点上至少有三条不同直线.

证明：设 P 是一点．p 是不在 P 上的一条直线(定理 7.2)，在 p 上取三个不同的点 A，B，C(公理 4)．因为 P 不在 p 上，所以 $P\neq A$，$P\neq B$，$P\neq C$，且 $a=PA$，$b=PB$，$c=PC$ 是 P 上的三条直线.

考虑直线 a 和 b．因为 $a\cdot p=A$，$b\cdot p=B$，$B\neq A$，于是 B 不在 a 上，A 不在 b 上，所以 $a\neq b$，重复以上讨论，最后可以得到 $a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$.

7.4 证明：如果在某一条直线上恰好有 $n(n\geqslant 3)$ 个不同点，则在每一条直线上都恰有 n 个不同点.

证明：用 p 记其上恰有 n 个不同点 A_1，A_2，A_3，…，A_n 的直线，在其中任一点上(比如说 A_2)取两条不同直线 q 和 r，这里 $p\neq q$，$p\neq r$(定理 7.3)，在 r 上另取一点 $B\neq A_2$(公理 4)，考虑联结 B 和点 A_1，A_2，A_3，…，A_n 的 n 条直线．和习题 3 中的证明一样，这 n 条直线互不相同且每一条都不同于 p 和 q．这样 q 截这 n 条直线于 n 个不同点，其中一点是 $q\cdot p=A_2$，从而在 q 上至少有 n 个点．假设在 q 上有 $n+1$ 个点，读者可以证明 p 上至少有 $n+1$ 个点，与题设矛盾，因此在 q 上恰有 n 个点.

7.5 证明：如果在任一直线上恰好有 n 个不同点，则总共有 n^2-n+1 个不同点.

证明：设 p 是一条直线．P 是不在 p 上的一点(公理 5)，在 p 上有 n 个不同点(假设)，它们和 P 确定 n 条不同直线(见习题 7.4 的证明)．在这条直线上有 n 个不同的点(定理 7.4)，其中一点是 P，这样除去 P 有 $n(n-1)$ 个不同点，包括 P 总共有 $n(n-1)+1=n^2-n+1$ 个不同点.

7.6 为在任一直线上有四个点的几何建立一个模型(如果可能的话).

解： 根据定理 7.5 总共有 $4^2-4+1=13$ 个点．我们将象例 2 那样使用集合 $\{0, 1, 2\}$ 以及加法表和乘法表：

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

注：集合 {0, 1, 2} 的元素是由自然数被 3 除所得的余数组成．这样，自然被分成了三组：(1)3, 6, 9, …各由 0 代表，(2)1, 4, 7, …各由 1 代表，(3)2, 5, 8, …各由 2 代表，这些数运算的结果仍用它们的代表元素表出．例如，$2+2=2\cdot2=4$ 中的 4 用 1 来代替，$1+2=2+1=3$ 中的 3 用 0 来代替．

三元数组 $(x_1, x_2, x_3)\neq(0, 0, 0)$ 的个数是 $3^3-1=26$．因为三元数组的个数是点的二倍，我们约定三元数组 (a, b, c) 和 $(2a, 2b, 2c)$ 代表同一个点．现在所需的点可以给出如下：

$$A=(0, 0, 1) \quad F=(1, 1, 0) \quad J=(1, 2, 0)$$
$$B=(0, 1, 0) \quad G=(1, 1, 1) \quad K=(2, 2, 1)$$
$$C=(1, 0, 0) \quad H=(0, 1, 2) \quad L=(2, 1, 2)$$
$$D=(0, 1, 1) \quad I=(1, 0, 2) \quad M=(1, 2, 2).$$
$$E=(1, 0, 1)$$

(注意：$(2, 1, 1)=(2\cdot2, 2\cdot1, 2\cdot1)=(1, 2, 2)=M$,
$(2, 0, 1)=(1, 0, 2)=I$, 等等.)

这些点四个一组位于下列直线上：

$x_1=0$: A, B, D, H. $\quad$ $x_1+x_2=0$: A, J, L, M.

$x_2=0$: A, C, E, I. $\quad$ $x_1+x_3=0$: B, I, K, M.

$x_3=0$: B, C, F, J. $\quad$ $x_2+x_3=0$: C, H, K, L.

$x_1+2x_2=0$: A, F, G, K. $\quad$ $x_1+x_2+x_3=0$: G, H, I, J.

$x_1+2x_3=0$: B, E, G, L. $\quad$ $x_1+2x_2+x_3=0$: D, F, I, L.

$x_2+2x_3=0$: C, D, G, M. $\quad$ $x_1+x_2+2x_3=0$: D, E, J, K.

$2x_1+x_2+x_3=0$: E, F, H, M.

读者可以试着画一个图形．我们在这里没有画出是因为它对研究 13 点几何没有明显的帮助．

7.7 证明：当任意取定一个顺序时，13 点几何中任一直线上的四个点都成一调和集．

证明：考虑共线点 B, E, G, L．我们首先证明：$H(B, E, G, L)$ 在 G 上的直线 $x_1+x_2+x_3=0$ 与 B 上的直线 $x_1=0$ 和 $x_3=0$ 分别交于点 H 和 J．直线 EH 交 $x_3=0$ 于 F，直线 EJ 交 $x_3=0$ 于 D．直线 FD 在 L 上，所以 $H(B, E, G, L)$．根据作图，我们还有：$H(B, E, L, G)$, $H(E, B, G, L)$ 和 $H(E, B, L, G)$.

直线 $2x_1+x_2+x_3=0$，交 $x_1=0$ 于 H，交 $x_3=0$ 于 F．直线 GH 交 $x_3=0$ 于 J，直线 GF 交 $x_1=0$ 于 A．因为直线 AJ 在 L 上，我们有 $H(B, G, E, L)$，还可得到 $H(G, B, E, L)$, $H(B, G, L, E)$, $H(G, B, L, E)$.

E 上的直线 $x_1+x_2+2x_3=0$ 交 $x_1=0$ 于 D，交 $x_3=0$ 于 J．直线 LD 交 $x_3=0$ 于 F，直线 LJ 交 $x_1=0$ 于 A．因为 AF 在 G 上，我们有 $H(B, L, E, G)$，还有 $H(L, B, E, G)$,

$H(B, L, G, E)$, $H(L, B, G, E)$.

剩下的情况：$H(G, E, B, L)$, $H(G, L, B, E)$和$H(E, L, B, G)$留给读者讨论.

7.8 作为31点几何(在任一直线上有6个点)的一个模型，我们取三元数组$(x_1, x_2, x_3)\neq(0, 0, 0)$作为点，这里每一个$x_i$都取自然数被5整除所得的余数集$\{0, 1, 2, 3, 4\}$. 取形如$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$的方程作为直线，这里每一$a_i$取自同一余数集（只是$a_1=a_2=a_3=0$除外），我们还约定$(jx_1, jx_2, jx_3)$($j=1, 2, 3, 4$)代表同一点，$j(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)=0$代表同一直线.

(a) 证明$(1, 2, 3)$和$(4, 3, 2)$是同一点.

证明：这里$(1, 2, 3)=(4\cdot1, 4\cdot2, 4\cdot3)=(4, 8, 12)$,若把它的每一值代之以被5所除得的余数,就成为$(4, 3, 2)$.

(b) 证明$(2, 4, 3)$和$(3, 1, 2)$是同一点.

证明：考虑这些三元数组中的第一个数2和3, 2必须用某个j去乘使得乘积$2j$除以5所得的余数是3. 取$j=4$我们有$(4\cdot2, 4\cdot4, 4\cdot3)$或$(3, 1, 2)$.

(c) 求出在$H=(1, 2, 3)$和$I=(3, 0, 2)$上的直线.

解：设$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$是所求直线. 因为H在这直线上，我们有(1) $a_1+2a_2+3a_3=0$, 又因为I在这直线上,我们有(2) $3a_1+3a_3=0$,这个方程组的解可由观察得到. 显然$a_1=1$和$a_3=1$满足(2),代入(1)，我们有$2a_2+4=0$，从而$a_2=3$, 所求直线是$x_1+3x_2+x_3=0$.

(d) 求出在二点$J=(2, 3, 2)$和$K=(1, 1, 3)$上的直线.

解：我们要解方程组：$2a_1+3a_2+2a_3=0$和$a_1+a_2+3a_3=0$, 把这两个方程相加，得到$3a_1+4a_2=0$, 取$a_1=2$, $a_2=1$. 从第一个方程我们得到$2a_3+1=0$, 从而$a_3=2$. 所求直线是：$x_1+3x_2+2x_3=0$.

(e) 求出在$J=(2, 3, 2)$和$L=(1, 1, 2)$上的直线.

解：相应的方程是$2a_1+3a_2+2a_3=0$和$a_1+a_2+2a_3=0$, 第二个方程乘以3加到第一个方程上，有$a_2+3a_3=0$, 取$a_2=2$, $a_3=1$. 从第一个方程得到$2a_1+3=0$ 从而$a_1=1$, 所求直线是$x_1+2x_2+x_3=0$.

(f) 找出直线$2x_1+3x_2+x_3=0$和$x_1+2x_2+2x_3=0$的公共点.

解：把第一个方程的两倍加到第二个方程上，有$3x_2+4x_3=0$, 取$x_2=2$, $x_3=1$. 从第一个方程得到$2x_1+2=0$, $x_1=4$. 所求的点是$(4, 2, 1)$或$(2, 1, 3)$或$(3, 4, 2)$或$(1, 3, 4)$.

(g) 在直线$x_1+3x_2+x_3=0$上找出六个点.

解：容易找出点$(0, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 0)$和$(1, 1, 1)$. 剩下两点可取$(1, 2, 3)$和$(3, 2, 1)$.

(h) 找出在(d)和(e)中的点$J=(2, 3, 2)$上的六条不同直线的方程.

解：特解：$2x_1+3x_2+x_3=0$.

7.9 考虑在习题7.8中直线$x_1=0$上的六个点，$A=(0, 0, 1)$,$B=(0, 1, 0)$, $D=(0, 1, 1)$, $E=(0, 1, 2)$, $F=(0, 2, 1)$和$G=(0, 2, 3)$. 证明在这些点中的一对,比如说A和B,把剩下的点分成两对D, G和E, F,使得$H(A, B, D, G)$和$H(A, B, E, F)$.

证明：在A上取直线$x_1+x_2=0$和$2x_1+x_2=0$. 在D上取直线$3x_1+3x_2+2x_3=0$, 交$x_1+x_2=0$于$P=(2, 3, 0)$,交$2x_1+x_2=0$于$R=(2, 1, 3)$. 设BP: $x_3=0$交$2x_1+x_2=0$于

$Q=(2,\ 1,\ 0)$, BR: $x_1+x_3=0$ 交 $x_1+x_2=0$ 于 $S=(2,\ 3,\ 3)$, 且 QS: $2x_1+x_2+x_3=0$ 交 $x_1=0$ 于 G. 因此, $H(A,\ B,\ D,\ G)$.

在 E 上取直线 $x_1+x_2+2x_3=0$ 交 $x_1+x_2=0$ 于 P, 交 $2x_1+x_2=0$ 于 $T=(2,\ 1,\ 1)$. 设 BT: $2x_1+x_3=0$ 交 $x_1+x_2=0$ 于 $U=(2,\ 3,\ 1)$, BP: $x_3=0$ 交 $2x_1+x_2=0$ 于 $Q=(2,\ 1,\ 0)$, 且 QU: $2x_1+x_2+3x_3=0$ 交 $x_1=0$ 于 F, 从而 $H(A,\ B,\ E,\ F)$.

7.10 利用欧氏几何的已知性质，为在任一直线上都有无穷多个点的射影平面给出一个模型.

解：注意到在前面六章中我们已经使用过这样一个模型. 我们把欧氏平面的全体点连同某些称为理想点的附加元素一起取作射影平面的点，把欧氏平面的全体直线连同一条理想直线一起取作射影平面的直线. 容易验证这一切都满足我们的五条公理. 现在我们给出另一个模型.

设 O 是普通空间的一个固定点, 考虑在 O 上的全体直线集和在 O 上的全体平面集. 每一对不同直线确定唯一一个平面, 每一对不同平面确定唯一一条直线. 把在 O 上的直线取作射影平面内的点, o 上的平面取作射影平面的直线, 定义关系“点在直线上”是指“直线位于平面内”就得到了具有所需性质的一个模型.

7.11 证明：如果两个三角形通过一条直线成透视, 则它们也通过一点成透视.

证明：考虑图 7-3 中的三角形 ABC 和 $A'B'C'$, 其中点 $P=AB\cdot A'B'$, $Q=BC\cdot B'C'$, $R=CA\cdot C'A'$ 在一条直线 o 上, 由于三角形 $AA'R$ 和 $BB'Q$ 通过点 P 成透视, 所以根据公理 6, 它们也通过一条直线成透视. 点 $O=AA'\cdot BB'$, $C=AR\cdot BQ$ 和 $C'=A'R\cdot B'Q$ 在这条直线上. 于是直线 AA', BB', CC' 在点 O 上, 而三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 通过这点成透视.

7.12 证明：在满足公理 1～10 的射影几何中, 任一直线上有无穷多个点.

证明：参看图 7-4, 其中 A, B, D 是直线 o 上的不同点. 根据公理 7 在这条直线上存在一点 F_1 使得 $H(A,\ B,\ D,\ F_1)$. 根据公理 8, 点对 A, B 和 D, F_1 相互分隔, 根据公理 9, A, B, D, F_1 是不同点.

根据公理 7, 在直线 o 上存在一点 F_2, 使得 $H(A,\ F_1,\ B,\ F_2)$. 根据公理 8, 点对 A,

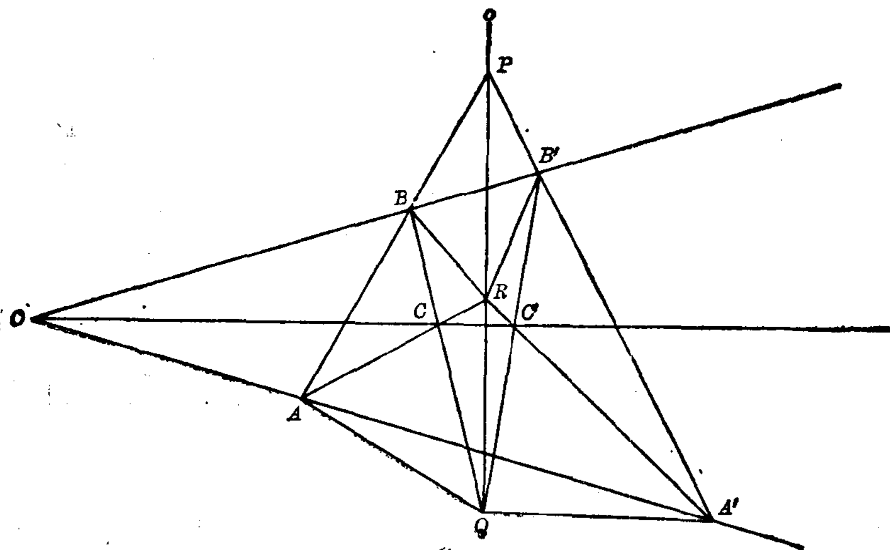


图 7-3

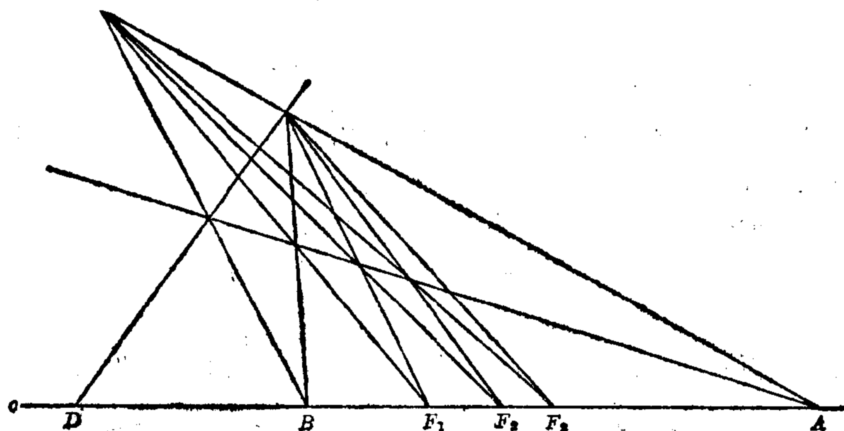


图 7-4

F_1和B, F_2互相分隔,根据公理9, A, B, F_1, F_2是不同的点. 现在A, B和D, F_1也互相分隔,因此,根据公理10, 点对A, B和D, F_2互相分隔, 且D和F_2是不同点, 从而A, B, D, F_1, F_2是不同的.

根据公理7, 在这条直线上存在一点F_3使得$H(A, F_2, F_1, F_3)$, 所以A, F_2和F_1, F_3互相分隔, 且A, F_1, F_2, F_3是不同点. 由于A, F_1和B, F_2也互相分隔, 根据公理10,我们有A, F_1和B, F_3互相分隔,所以B, F_3是不同点. 同理, 由于A, B和D, F_1互相分隔, 我们有A, B和D, F_3互相分隔, 所以D和F_3是不同点. 这样, A, B, D, F_1, F_2, F_3是不同点.

根据公理7, 在这条直线上存在一点F_4, 使得$H(A, F_3, F_2, F_4)$. 重复上面的讨论, 我们发现A, B, D, F_1, F_2, F_3, F_4是不同点, 这个步骤可以无限重复下去. 于是我们证明了(见第四章最后一节的头一段)在一条直线上的调和列中的点总有无穷多个.

事实上,公理7保证了更强的结果: 在直线o上存在一个调和网$R(A, B, D)$. 因为这个网包含上面讨论的调和列作为子集,调和网中的点也应有无穷多个.

7.13 证明基本定理: 已知有理射影平面内三个不同的点A, B, C和另外三个不同的共线点A', B', C' (这两组点可以在同一直线上也可能在不同直线上), 则存在唯一一个射影把A, B, C分别变到A', B', C'.

证明: 首先, 我们在有理射影平面内建立定理1.3 (根据公理, 其作图是有效的). 这样,就肯定存在一个射影. 现在假定存在两个射影:

$$(A, B, C, D)\barwedge(A', B', C', D')\text{和}(A, B, C, D)\barwedge(A', B', C', D''),$$

这里D是与A, B(共线的某一点,但不同于A, B, C, 那么$(A', B', C', D')\barwedge(A', B', C', D'')$. 但是这个射影有三个不动点,所以,根据引理,$D=D''$. 因此只能存在一个射影.

§7.3 补 充 题

7.14 用图7-1或图7-2证明: 在七点几何中存在射影,使得在一条直线上的三个点中的任意两个互换.

7.15 叙述并证明习题7.14的对偶.

7.16 在图7-2中验证完全四点形$ABCG$的对边点共线,有没有一个完全四点形使它不成立?

7.17 在习题7.6的13点几何中验证：

(a) A, B, C, D, E, F, G 七个点并不构成一个7点几何(进一步的分析将表明这对13点中的任意7个点都成立).

(b) 完全四点形 $AFIM$ 的对边点是不共线点 $AF\cdot IM=G$, $AI\cdot FM=E$ 和 $AM\cdot FI=L$. 研究一个或多个其它完全四点形；也研究作为对偶的一个或多个完全四线形.

(c) 由于三角形 DEL 和 GIK 通过点 C 成透视，所以它们通过直线 $x_3=0$ 成透视. 检验其它的三角形对.

(d) 巴普斯定理成立，但总是以特殊形式出现(见习题3.4).
提示：取点 C, E, I 和 K, F, G, 证明巴普斯线是 $x_1+x_2=0$. 考虑一对或几对其它的共线三元点组对.

(e) 基本定理成立.

7.18 已知31点几何(习题7.8)的点 $K=(2, 3, 2)$, $L=(3, 1, 1)$, $R=(2, 1, 3)$, $P=(2, 3, 0)$, $Y=(1, 1, 1)$.

证明(a)直线 KP 在 $A=(0, 0, 1)$上. (b)直线 KR 在 L 上. (c)直线 KL 和 PY 在 $Z=(2, 0, 1)$上.

7.19 对于习题7.9中 $x_1=0$ 上的点，证明：

$$(A, B, D, G, E, F)\,\overline{\wedge}\,(A, B, G, D, F, E).$$

提示：从点 $P=(2, 3, 0)$把 $x_1=0$ 上的点射影到 $x_1+x_3=0$ 上，再从 $V=(2, 3, 1)$ 把 $x_1+x_3=0$ 上的点射影到 $x_1=0$ 上. 这样在一条直线上所选的点对(见习题7.9)把剩下的点分成两对，其中每一对在这条直线上的双曲对合中都是互逆的. 这个双曲对合以那对初始点作为二重点).

7.20 (a)在习题7.9的直线 $x_1=0$ 上，验证 $H(A, D, B, E)$和 $H(B, D, E, G)$.

(b) 假定由习题7.9中的 $H(A, B, D, G)$推出点对 D, G 分隔点对 A, B, 对于(a)中的 $H(A, D, B, E)$和 $H(B, D, E, G)$也假定同样的结果，得出矛盾.

(c) 在习题7.8(g)的直线 $x_1+3x_2+x_3=0$ 上任取两点作为完全四点形的对边点，证明第三个对边点不在这条直线上.

(d) 在习题7.8(h)中任取三条直线. 在第一条直线上选两个不同点 A, A', 每一个都不同于 J; 同样，在第二条直线上选 B, B', 在第三条直线上选 C, C'. 三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 通过点 J 成透视，证明它们也通过某条直线成透视.

7.21 习题7.8的直线 $x_1+x_2=0$ 和 $x_1+2x_2=0$ 都在点 $A=(0, 0, 1)$上，在这两条直线上选不同点组——一条选 X, Y, Z, 另一条选 X', Y', Z'——使得 XX', YY', ZZ' 不共点. 找出巴普斯线的方程，这条直线在 A 上吗?

第八章　点素二次曲线和线素二次曲线

§8.1　基本内容

1. 引　　言

在数学史上，早在公元前约 430 年，人们就开始研究二次曲线或圆锥截线(即直圆锥的平面截线)．圆锥曲线包括所谓退化的或奇异的二次曲线(如单个的点，一对不同直线，两条重合直线)和非退化的二次曲线．非退化的二次曲线可分为抛物线、双曲线和椭圆(包括圆)．

在射影几何里，点素二次曲线是指点的某种非退化的轨迹．而其对偶，线素二次曲线是指线的某种非退化的包络．这些点素或线素二次曲线实际上是解析几何中熟悉的非退化二次曲线，这点我们继续研究下去就会明显起来．比如，在这一章里，我们将证明它们都具有性质：(a)、一条直线(一个点)和点素(线素)二次曲线的交点(连线)不能多于两点(两条线)；(b)、五个点(线)，其中任何三点(线)都不共线(点)确定唯一的一条点素(线素)二次曲线．在本书中，除排另外声明，点素二次曲线、线素二次曲线和二次曲线是指非退化的轨迹和包络．

2. 点素二次曲线

如图 8-1 所示，考虑在不同中心 R 和 S 上的线束之间的非透视射影

$$R(a,\ b,\ c,\ \cdots)\,\overline{\wedge}\,S(a',\ b',\ c',\ \cdots),$$

两线束中相互对应的直线的交点 $A=a\cdot a'$，$B=b\cdot b'$，$C=c\cdot c'$，$\cdots$ 的全体称为*点素二次曲线*．在解析几何中，一条二次曲线看成是一个动点所描出的轨迹；在射影几何中，一条点素二次曲线是一点一点构造出来的．这实际上是在 R 上任取另一直线 x，作出它在 S 上的对应直线 x'，为此，我们利用已给的直线对 $a,\ a'$；$b,\ b'$；$c,\ c'$ 把 $(a\cdot c')(a'\cdot c)$ 和 $(b\cdot c')(b'\cdot c)$ 的交点定为巴普斯点(射影中心)P．对于 R 上的任何别的直线(比如 d)，设 P 和 $a'\cdot d$ 的连线交 a 于 D'，则 $SD'=d'$ 是 d 的射影对应直线，$d\cdot d'=D$ 是点素二次曲线上的另一个点．再如对 R 上的任何别的直线 e，连结 P 和 $b'\cdot e$ 交 b 于 E'，则 $SE'=e'$ 是 e 的对应直线，$e\cdot e'$ 是点素二次曲线上的另一点；……．

中心连线 RS，把它看作是 R 上的线束中的一条直线时记为 S，把它看作是 S 上的线束中的一条直线时记为 r'．现在 $s\cdot c'=S$；令 $PS\cdot c=S'$．则 $SS'=s'$ 是 s 的对应直线，$s\cdot s'=S$ 是点素二次曲线上的一个点．同理，R 也是点素二次曲线上的一个点．

一般地，在 R 上的线束中的任意直线 x 上有点素二次曲线的两个不同的点 R 和 $X=x\cdot x'$，其中 x' 在 S 上，是 x 的射影对应直线．直线 $PR=r$ 是一个例外，因为它的对应是 $r'=RS$，而 $r\cdot r'=R$．我们定义：

点素二次曲线的*切线*是这样的直线，它上面有且仅有二次曲线的一个点．

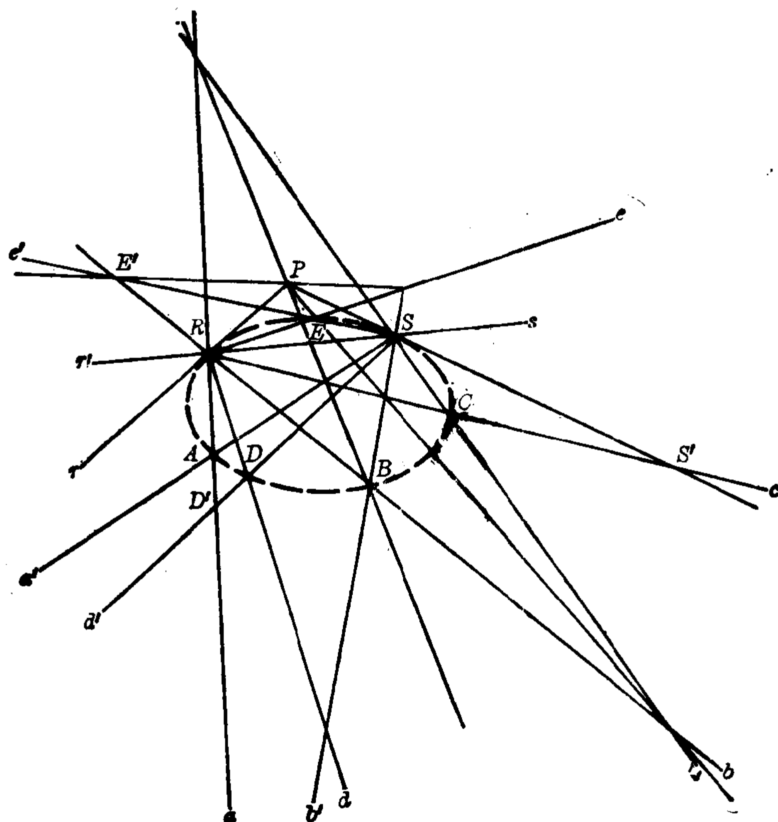


图 8-1

于是,对图 8-1 中的点素二次曲线,PR 和 PS 都是切线.

定理 8.1 一条点素二次曲线在生成此曲线的两个线束之一的中心 $R(S)$ 处的切线是中心连线 RS 的对应直线. 此时 RS 看成是在 $S(R)$ 的线束中的一条直线.

为了证明产生点素二次曲线的两个射影线束的中心 R 和 S 作为该点素二次曲线上的点,并不起特殊的作用,在习题 8.1 中我们将证明

定理 8.2 点素二次曲线上任意两个不同的点都可以用来作为产生此曲线的两个射影线束的中心.

由此还可推得:

定理 8.3 一条点素二次曲线由它的任意五点唯一确定(其证明参看习题 8.2).

定理 8.4 点素二次曲线上的任何三个不同的点不共线.

定理 8.5 五个不同点(其中任何三个点都不共线)确定唯一一条点素二次曲线.

定理 8.6 在点素二次曲线的任一点上,有且仅有该点素二次曲线的一条切线.

3. 线素二次曲线

点素二次曲线的对偶, 即在不同直线(轴)上的两个非透视射影点列的对应点连线之全体称为*线素二次曲线*. 考虑图 8-2 中在两不同轴 r 和 s 上的非透视射影

$$r(A,\ B,\ C,\ \cdots)\,\overline{\wedge}\,S(A',\ B',\ C',\ \cdots),$$

则 AA', BB', CC', r, s 都是通过射影生成的线素二次曲线中的直线. 为了作出其它直线,我们首先通过连接 $AC'\cdot A'C$ 和 $BC'\cdot B'C$ 确定巴普斯线(射影轴)p. 对于 r 上的任一其它

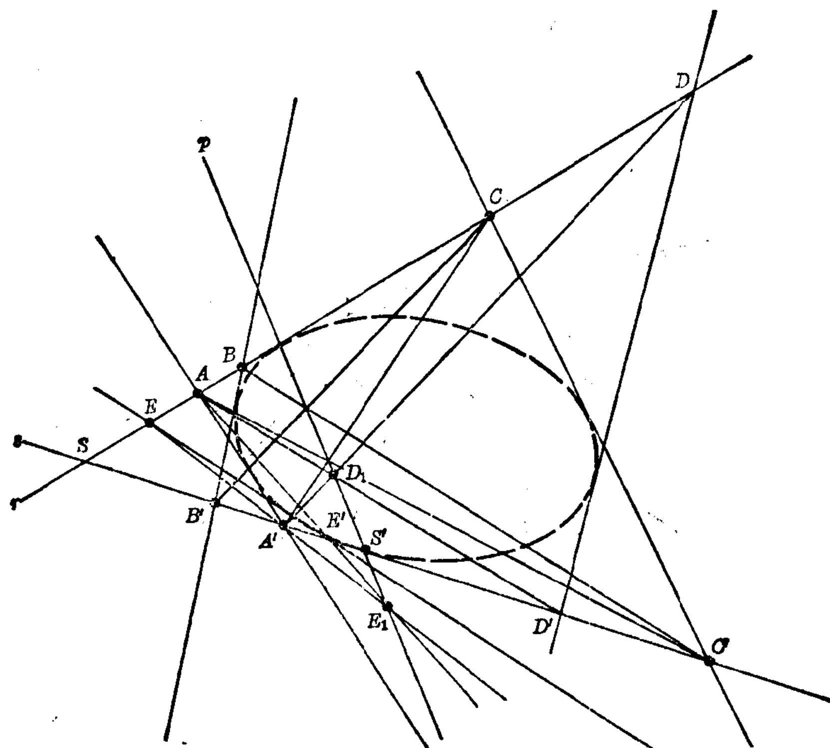


图 8-2

点(比如 D), 令 $A'D\cdot p=D_1$; 则 $AD_1\cdot s=D'$ 是 D 的射影对应点, DD' 是线素二次曲线中的另一直线.

一般地, 在 r 上的点列中的任意一点 X (或 s 上的点列中的点 X')上有线素二次曲线中的两条不同直线 r 和 $x=XX'$, 其中 X' 是 X 在 s 上的射影对应点. 点 $p\cdot s=S'$ 例外, 因为它的对应点是 $S=r\cdot s$, 而 $SS'=s$. 我们定义:

线素二次曲线的切点是这样的点,在这点上有且仅有二次曲线的一条直线.

不难证明:

定理 8.1' 线素二次曲线在生成此曲线的点列的轴 $r(s)$ 上的切点,是点 $r\cdot s$ 的对应点; 此时点 $r\cdot s$ 看成是在 $s(r)$ 上的点列中的一点.

容易得出定理 8.2～8.6 的对偶,例如

定理 8.5' 五条不同直线(其中任何三条都不共点)确定唯一一条线素二次曲线.

定理 8.6' 在线素二次曲线的任一直线上,有且仅有该线素二次曲线的一个切点.

§8.2 问题及其解

8.1 证明: 点素二次曲线上的任何两个不同点都可以用作生成此曲线的两个射影线束的中心.

证明: 考虑图 8-3,点素二次曲线由两个线束 $R(a, b, c, d, \cdots)$ 和 $S(a', b', c', d', \cdots)$ 生成,至少它上面的点 A, B, C, D 能象图 8-1 中那样作出. 设 $AB=m, AC=n$; $m\cdot c=K$, $m\cdot d=L$; $n\cdot b'=T$, $n\cdot d'=U$; $b'\cdot d=V$. 则因为

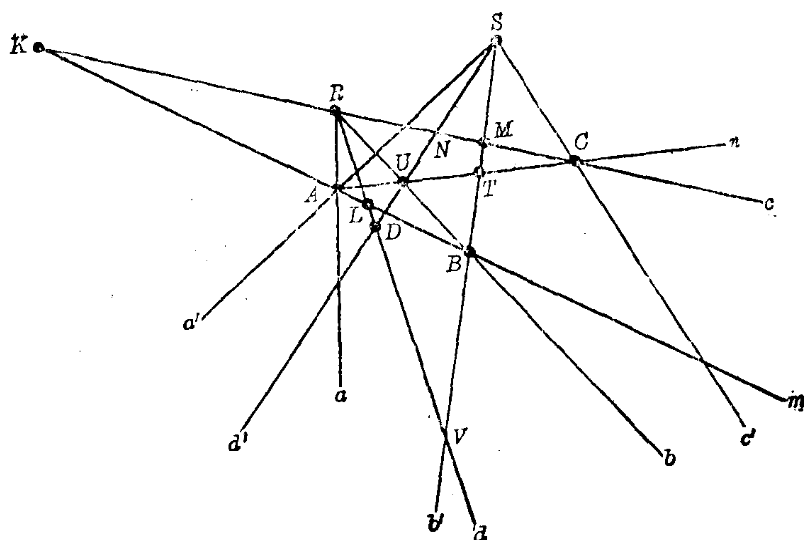


图 8-3

$$(a,\ b,\ c,\ d)\barwedge(a',\ b',\ c',\ d'),$$

我们有
$$(A,\ B,\ K,\ L)\barwedge(A,\ T,\ C,\ U).$$

但是后面这个射影是一个透视；所以 BT, CK 和 LU 有公共点 M.

现在考虑

$$(BA,\ BR,\ BS,\ BD)\barwedge(L,\ R,\ V,\ D)\overset{M}{\barwedge}(U,\ N,\ S,\ D)$$
$$\barwedge(CA,\ CR,\ CS,\ CD).$$

则
$$(BA,\ BR,\ BS,\ BD)\barwedge(CA,\ CR,\ CS,\ CD),$$

而且对应直线的交点在点素二次曲线上，所以这个射影也生成此点素二次曲线.

8.2 证明：点素二次曲线可由它的任意五点唯一确定.

证明：设 A, B, C, R, S 是给定的点素二次曲线上的任意五点. 根据定理 8.2，这些点中的任何两点(比如 R 和 S)可取作生成此点素二次曲线的两个线束的中心. 根据基本定理，剩下的点确定唯一一个射影

$$(RA,\ RB,\ RC)\barwedge(SA,\ SB,\ BC),$$

这个射影必定生成给定的点素二次曲线.

8.3 作出图 8-1 中由 $R(a,\ b,\ c,\ \cdots)\barwedge S(a',\ b',\ c',\ \cdots)$ 生成的点素二次曲线在 B 点的切线.

解：设给定的点素二次曲线看成是以 B 点和曲线上另一点（比如 R）为中心的两个射影线束生成的. 其中 B 点即在其上作切线的那点(见图 8-4)，也就是说把此点素二次曲线看成是由射影

$$B(a'',\ c'',\ b',\ \cdots)\barwedge R(a,\ c,\ s,\ \cdots)$$

生成的(看定理 8.2)，其中 $BA=a''$, $BC=c''$. 连 $(a''\cdot s)(a\cdot b')$ 和 $(c''\cdot s)(c\cdot b')$ 定出射影中心 Q. QB 就是所求的切线.

8.4 作出由四条直线（其中任何三条都不共点）和其中一条直线上的切点所确定的线素二次曲线.

解：在图 8-5 中，设已知直线是 a_1, a_2, a_3, a_4 和已知点是 a_2 上的切点 B，把 a_2 和另一直线，比如 a_4，取作生成此线素二次曲线的射影点列的轴. 现在我们来建立这个射影. 令

图 8-4

图 8-5

$a_2 \cdot a_1 = A$, $a_4 \cdot a_1 = A'$; $a_2 \cdot a_3 = C$, $a_4 \cdot a_3 = C'$. 由定理 8.1 的对偶可知, a_2 上点 B 在 a_4 的对应点是 $a_2 \cdot a_4 = B'$. 于是生成的射影是

$$a_2(A,\ B,\ C,\ \cdots) \barwedge a_4(A',\ B',\ C',\ \cdots).$$

其次, 我们来确定这个射影的轴. 因为 B 是 a_2 上的切点, B 在射影轴上, 这个轴上的另一点是 $AC' \cdot A'C = U$, 于是射影轴是 $BU = p$.

最后, 在 a_2 上另取一点 D, 我们来作出它在 a_4 上的对应点. 令 $A'D \cdot p = V$, $AV \cdot a_4 = D'$. 则 D' 是所求的 D 的对应点, DD' 是线素二次曲线上的另一条直线.

§8.3 补 充 题

8.5 证明由在不同中心上的两个透视线束所生成的点素二次曲线是退化的，它由透视轴和中心连线(即两个线束中心的连线)所组成.

8.6 研究习题 8.5 的对偶.

8.7 证明：若一个点素二次曲线有三点共线，则它是退化的.

8.8 在图 8-1 中，证明 R 在二次曲线上；在图 8-2 中，证明 $R=p\cdot r$ 是一个切点.

8.9 证明：定理 8.4, 8.5, 8.6.

8.10 任取五点，其中任何三点都不共线，作出这些点上的点素二次曲线上若干个另外的点.

提示：注意在这些图中用的是椭圆，这样做是为了保持本书作图前后一致. 建议对所有的作图先画一个椭圆，然后在这个椭圆上取给定的点和线，为什么这样做没有失去一般性？

8.11 任取五条直线(其中任何三条都不共点)，作出在这些线上的线素二次曲线的若干条另外的直线.

8.12 作出习题 8.3 的对偶.

8.13 已知线素二次曲线 $\mathscr{C}'$ 的三条直线 a, b, c 和分别在 a, b 上的切点 A, B, 作出：(i)C' 的其他直线；(ii)在 c 上的切点.

提示：把 A, B 取作生成 $\mathscr{C}'$ 的两个射影线束的中心.

8.14 已知点素二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的三个点 A, B, C 和分别在 A, B 上的切线 a, b, 作出(i)曲线 $\mathscr{C}'$ 的其他点；(ii)点 C 处的切线.

8.15 设 A, B, C 是直线 k 上的三个不同点，P, Q 是不在 k 上的不同点. 证明 $R=PA\cdot QB$, $S=PA\cdot QC$, $T=PB\cdot QA$, $U=PB\cdot QC$, $V=PC\cdot QA$, $W=PC\cdot QB$ 在一条二次曲线上.

8.16 证明：若 XYZ 是一个变动的三角形(见图 8-6)，它的边 $x=YZ$, $y=XZ$, $z=XY$ 分别在定点 U, E, D 上，同时 Y 沿着定直线 $b=CB$ 运动，Z 沿着定直线 CA 运动，则顶点 X 在一条二次曲线上运动.

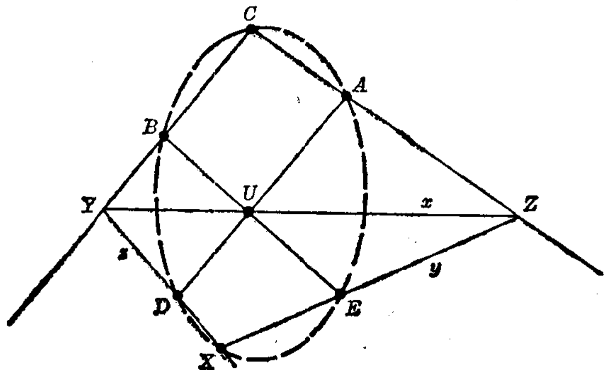


图 8-6

8.17 在习题 8.16 中，证明二次曲线 $\mathscr{C}$ 在点 A, B, C, D, E 上.

提示：当 x 和 BE 重合时，y 也与 BE 重合，此时 X 在 B 点上.

8.18 利用习题 8.16 和 8.17 的结果. 设计另一种作二次曲线的方法，此曲线在五个已知点 A, B, C, D, E 上(其中任何三点都不共线).

8.19 写出习题 8.16, 8.17, 8.18 的对偶.

8.20 证明：若两个三角形的顶点在一条二次曲线 $\mathscr{C}$ 上，则这些三角形的各边与另一条二次曲线 $\mathscr{C}'$ 相切.

第九章　极点和极线

§9.1　基 本 内 容

1. 极　　线

在图 9-1 中的点素二次曲线 $\mathscr{C}$ 上，任取三对不同的点 X, X_1; A, A_1; B, B_1，使得每对点与不在 $\mathscr{C}$ 上的一给定点 P 共线．令 $XA=a$, $XA_1=a_1$, $XB=b$, $XB_1=b_1$; $X_1A=a'$, $X_1A_1=a'_1$, $X_1B=b'$, $X_1B_1=b'_1$．则有(见定理 8.2)

$$X(a,\ b,\ a_1,\ b_1)\barwedge X_1(a',\ b',\ a'_1,\ b'_1).$$

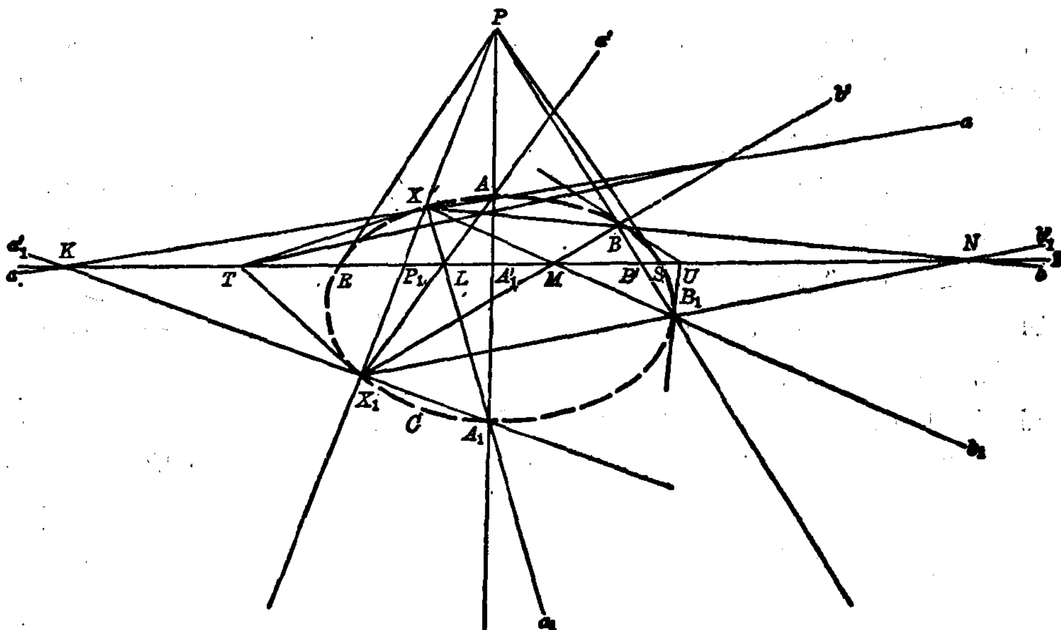


图　9-1

射影中心 T 在二直线 $(a\cdot b')(a'\cdot b)$ 和 $(a\cdot a'_1)(a'\cdot a_1)$ 上．在 $a\cdot a'_1=K$, $a'\cdot a_1=L$ 和 T 上的直线记为 p．因为 K, L, P 是完全四点形 XAA_1X_1 的对角三角形的顶点，由定理 4.12 可得 $H(a,\ a'_1;\ p,\ KP)$．从而 $H(X,\ X_1;\ P_1,\ P)$且 $H(A,\ A_1;A'_1,\ P)$，其中 $P_1=XX_1\cdot p$, $A'_1=AA_1\cdot p$.

同理，利用完全四点形 XX_1B_1B，我们有 $b\cdot b'_1=N$, $b'\cdot b_1=M$ 和 T 在一条直线(比如 p')上，且 $H(X,\ X_1;\ P'_1,\ P)$，其中 $P'_1=XX_1\cdot p'$．但是由 $H(X,\ X_1;\ P_1,\ P)$和 $H(X,\ X_1;P'_1,\ P)$可知 $P'_1=P_1$．所以 $p'=p$, $H(B,\ B_1;B'_1,\ P)$，其中 $B'_1=BB_1\cdot p$.

现在 p 由 T 和 P_1 决定(见定理 8.1)，T 是曲线 $\mathscr{C}$ 在 X 和 X_1 处切线的公共点，P_1 是 P 关于 X 和 X_1 的调和共轭点．这样，对于给定的曲线 $\mathscr{C}$ 来说，直线 p 最多取决于共线点 P, X, X_1．我们来证明 p 仅仅取决于 P.

设 R, S 是在 p 上的曲线 $\mathscr{C}$ 的点，则 PR(还有 PS)是 $\mathscr{C}$ 的切线. 因为，假定 PR 交 $\mathscr{C}$ 于另一点 $R_1 \neq R$, 则 R_1' 是 PR 上的点，使得 $H(R, R_1; R_1', P)$. 对完全四点形 XX_1R_1R 重复上述论证，可得点 R_1' 在 p 上. 但是现在 P 和 R 重合(见习题 4.7)，与假设 P 不在 $\mathscr{C}$ 上矛盾. 于是 R, S 只取决于 P，因而 $p=RS$ 也只取决于 P.

至此，我们已经证明了关于直线 p 的点的一些定理，这些定理将列举在下面. 首先，我们取其中一个作为定义：

若不在给定点素二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的任意点 P 是顶点在 $\mathscr{C}$ 上的任一完全四点形的一个对边点，则有另外两个对边点确定唯一一条直线 p，称为 p 关于 $\mathscr{C}$ 的**极线**. 若 P 在 $\mathscr{C}$ 上，则 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线是 $\mathscr{C}$ 在 P 点的切线.

于是有：

定理 9.1 点 P 关于 $\mathscr{C}$ 上每一对与 P 共线的点的调和共轭点在 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上.

定理 9.2 若完全四点形的顶点都在 $\mathscr{C}$ 上，则它的对角三角形的每一顶点关于 $\mathscr{C}$ 的极线是这点的对边.

定理 9.3 $\mathscr{C}$ 上每两个与 P 共线的点处的切线交点在 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上.

定理 9.4 从 P 作 $\mathscr{C}$ 的切线(如果有的话)，则切点在 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上.

对定理 9.4 中"如果有的话"这句话需要作一些解释. 读者十分清楚，在欧氏几何里，过椭圆的中心不能作椭圆的切线，因为中心在椭圆的"内部". 在射影几何里，一条点素二次曲线将射影平面分为两个区域——一个区域是二次曲线的*内部*，过其中的每一点的每一条直线都和二次曲线交于两个点；另一个区域是二次曲线的*外部*，过其中每一点的直线中，有些和二次曲线相交，有些则不相交. 于是过二次曲线内部的点不能作它的切线，而过二次曲线外部的每一点可作曲线的两条切线.

图 9–1 的对偶可用图 9–1′ 来说明. 这里，x, x_1; a, a_1; b, b_1 是线素二次曲线 $\mathscr{C}'$ 上三对不同的直线. 它们分别与某一不属于 $\mathscr{C}'$ 的直线 p (即 p 不是 $\mathscr{C}$ 中的直线) 共点. 令 $x \cdot a=A$, $x \cdot a_1=A_1$, $x \cdot b=B$, $x \cdot b_1=B_1$; $x_1 \cdot a=A'$, $x_1 \cdot a_1=A_1'$, $x_1 \cdot b=B'$, $x_1 \cdot b_1=B_1'$. 则由定义可得到

$$x(A, B, A_1, B_1) \barwedge x_1(A', B', A_1', B_1').$$

射影轴 t 是由 $AB' \cdot BA'$ 和 $AA_1' \cdot A'A_1$ 确定的直线，P 是 $AA_1'=l$, $A'A_1=k$ 和 t 的交点，且 k, l, p 是完全四线形 xaa_1x_1 的对角三角形的三条边，我们留给读者来完成这个讨论，并且定义

若不在给定的线素二次曲线 $\mathscr{C}'$ 上的任意直线 p 是边为 $\mathscr{C}'$ 中直线的任一完全四线形的对角三角形的一条对角线，则有另外两条对角线确定唯一一点 P，称为 p 关于 $\mathscr{C}'$ 的**极点**. 若 p 是 $\mathscr{C}'$ 中的直线，则 p 关于 $\mathscr{C}'$ 的极点是在 p 上的切点.

容易写出定理 9.1～9.4 的对偶：

定理 9.1′ 直线 p 关于 $\mathscr{C}'$ 中每一对与 p 共点的直线的调和共轭线在 p 关于 $\mathscr{C}'$ 的极点上.

定理 9.2′ 若完全四线形的四边都在 $\mathscr{C}'$ 上，则它的对角三角形的每一边关于 $\mathscr{C}'$ 的极点是这边的对顶点.

定理 9.3′ $\mathscr{C}'$ 中每两条与 p 共点的直线的切点的连线在 p 关于 $\mathscr{C}'$ 的极点上.

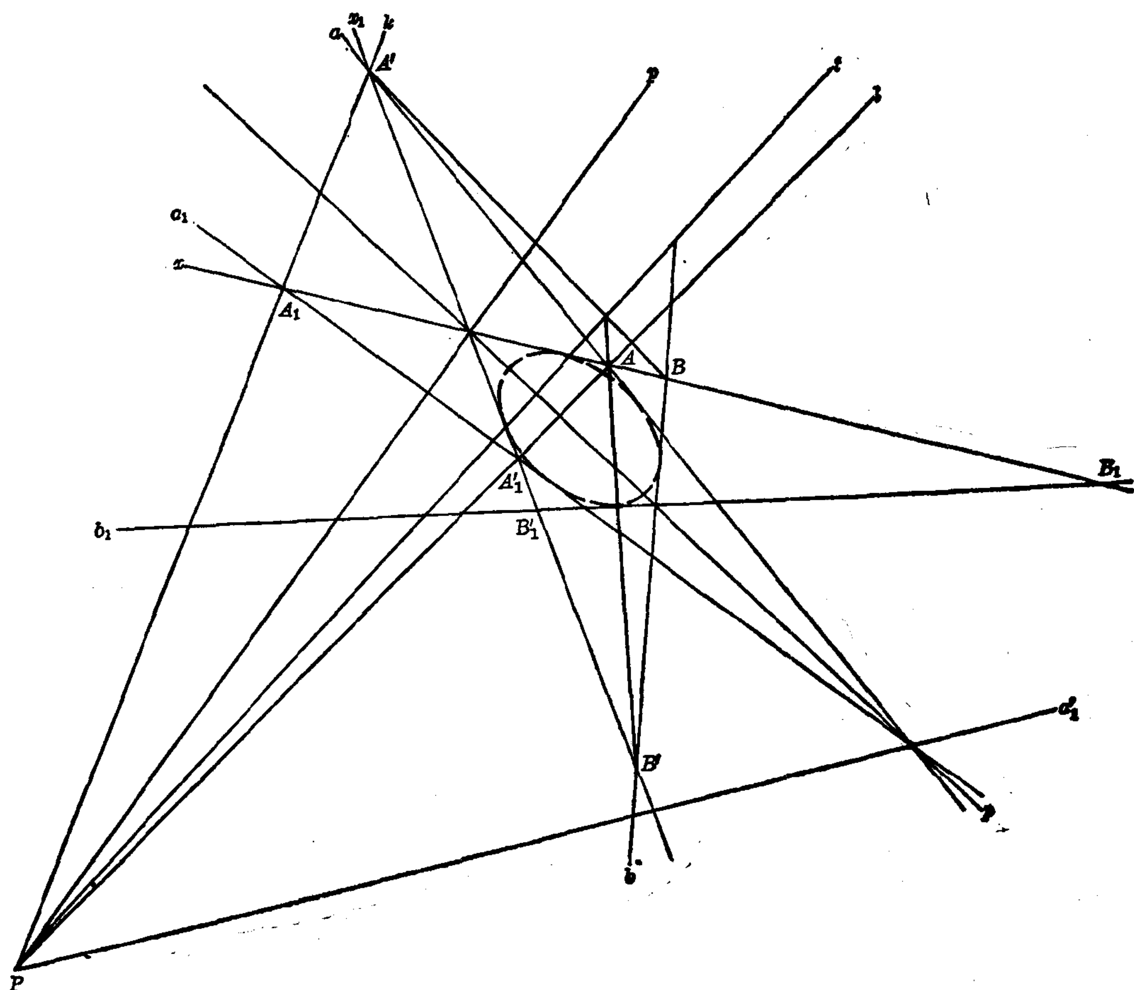


图 9-1′

定理 9.4′ 在 $\mathscr{C}'$ 的与 p 共线的切点处作 $\mathscr{C}'$ 的切线（如果有的话）在 p 关于 $\mathscr{C}'$ 的极点上.

2. 点素二次曲线和线素二次曲线的关系

在图 9-2 中的点素二次曲线 $\mathscr{C}$ 上取四点 X, X_1, B, B_1, 在这些点处的 $\mathscr{C}$ 的切线分别记为 x, x_1, b, b_1. 令 $BX_1 \cdot B_1X = M$, $BX \cdot B_1X_1 = N$, $BB_1 \cdot XX_1 = P$; $x \cdot x_1 = T$, $b \cdot b_1 = U$, $b \cdot x = V$, $b_1 \cdot x_1 = W$, $b \cdot x_1 = Y$, $b_1 \cdot x = Z$. 由定理 2.10 可得

$$b(U,\ B,\ V,\ Y) \overset{P}{\barwedge} b_1(U,\ B_1,\ W,\ Z) \barwedge b_1(B_1,\ U,\ Z,\ W),$$

所以 $b(U,\ B,\ V,\ Y) \barwedge b_1(B_1,\ U,\ Z,\ W)$, BB_1 是其射影轴.

假设固定 PBB_1 而令 PXX_1 变动，那么 Y 和 W 分别沿着 b 和 b_1 移动，而生成线素二次曲线 $\mathscr{C}$, 于是我们证明了:

定理 9.5 点素二次曲线的切线构成线素二次曲线.

它的对偶是:

定理 9.5′ 线素二次曲线的切点构成点素二次曲线.

由此，我们把“二次曲线”规定为点素二次曲线连同它的切线，或线素二次曲线连同它的切点. 于是我们可以说，图 9-1 中的完全四点形 XAX_1A_1 内接于二次曲线. 而图 9-1′ 中

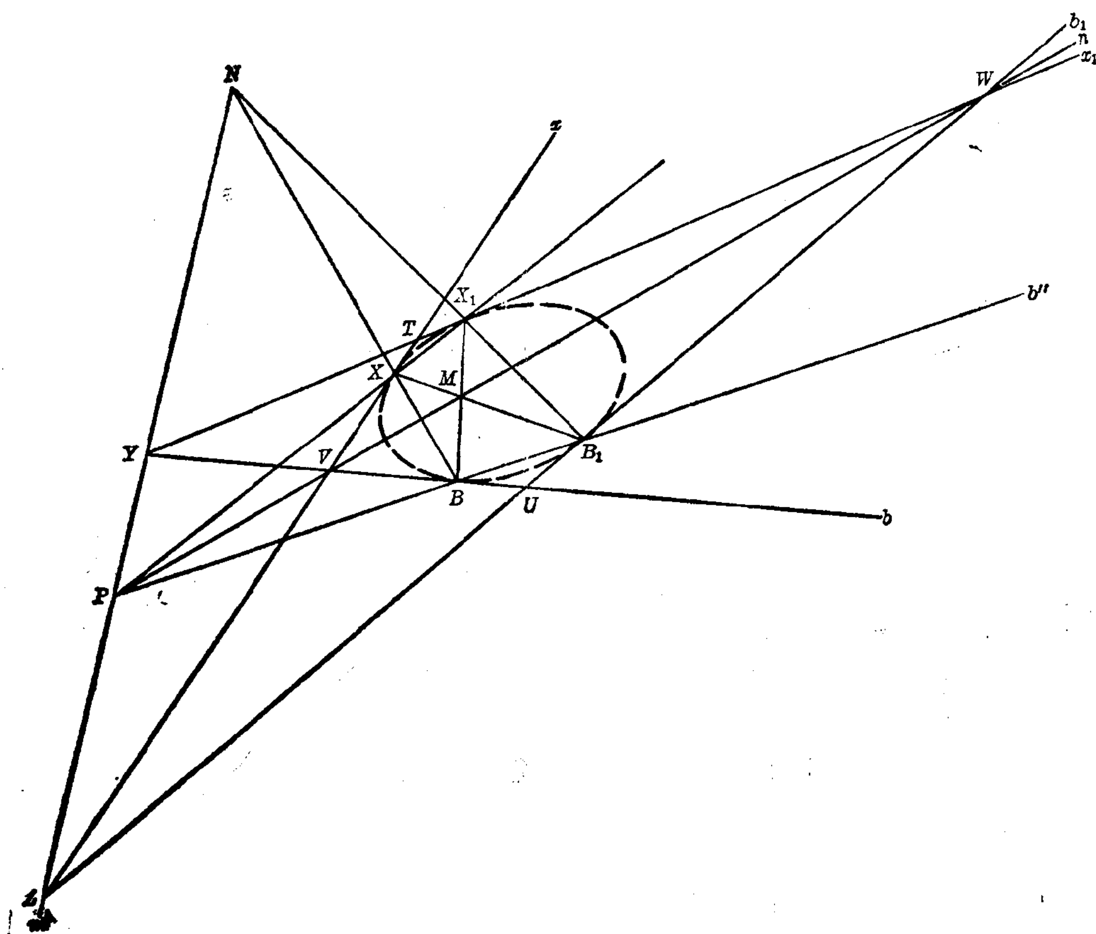


图 9-2

的完全四线形 xax_1a_1 外切于二次曲线.

根据定义，任何二次曲线是自对偶的，所以定理 9.2 和 9.2′ 可以重述如下：

定理 9.2 如果一完全四点形内接于二次曲线，则它的对角三角形的每一边是其所对顶点的极线.

定理 9.2′ 如果一完全四线形外切于二次曲线，则它的对角三角形的每一顶点是其对边的极点.

在习题 9.1 中，我们将证明

定理 9.6 四个顶点都在二次曲线上的完全四点形和四条边都是二次曲线在这些点处的切线的完全四线形有相同的对角三角形.

在习题 9.2 中，我们将给出下述定理的部分证明.

定理 9.7 若 B 是一个定点，b_1 是二次曲线的固定切线，X 是二次曲线上的一个动点，x 是二次曲线在 X 点的切线，则当 X 变动时，有

$$(BX,\ \cdots)\,\overline{\wedge}\,(b_1\cdot x,\ \cdots).$$

3. 极点和极线的作法

考虑图 9-1 中点 P 关于给定的二次曲线的极线 p. 从 p 上的点 T 和 U 作二次曲线的切线，它们确定曲线上的点 X, X_1; B, B_1, 直线 XX_1 和 BB_1 又确定点 P 为完全四点形

XX_1BB_1 的第三个对边点，它的另外两个对边点是 p 上的 M，N．由此及定理 9.6 便证明了

定理 9.8 若直线 p 是点 P 关于给定二次曲线的极线，则 P 是 p 关于此曲线的极点．

在 p 上的点 T 的极线是 P 上的 XX_1，由此得出

定理 9.9 若 Q 是点 P 关于二次曲线的极线 p 上一点，则 Q 关于此曲线的极线在 P 上．

若二次曲线完全给定，则已知点的极线和已知直线的极点就很容易作出．若已知点在二次曲线上，则它的极线是在此点的切线；若已知直线 p 切于二次曲线，则它的极点是在 p 上的切点．此外，若已知点是 P(见图 9-2)，在 P 上任取两条直线，它们交二次曲线于不同点 B，B_1 和 X，X_1，令 $BX_1 \cdot B_1X = M$，$BX \cdot B_1X_1 = N$；则 P，M，N 是四点形 BB_1X_1X 的对角三角形的顶点，根据定理 9.2，直线 MN 是所求的 P 点的极线．读者可自行证明，按上述作法可得出二次曲线内部的点(如 M)的极线．

设图 9-2 中的 m 为已知直线，它的极点 M 可如下作出：根据定理 9.9，m 上任一点的极线通过 M，于是 m 上的任何两点的极线的交点就是所求的极点．当给定直线与二次曲线交于两个不同点时(如图 9-2 中的 n)，极点的另一种作法如下：在每个交点处作二次曲线的切线，切线的交点就是所求的极点．

在习题 9.3 中将考虑二次曲线没有完全给定时的类似作法．

4．共轭点和共轭直线

定理 9.8 中的极点和极线的关系建立了平面上的直线与点之间的一个对应，使得平面上的每一点都对应着唯一一条直线(这点关于二次曲线的极线)，而每一直线都对应着唯一一点(这直线关于二次曲线的极点)．

在习题 9.4 中我们将证明

定理 9.10 当一个点在一条直线上变动时(形成点列)，它关于给定二次曲线的极线在与此点列射影相关的线束中变动．

如果 P，Q 中每一点都在另一点关于二次曲线的极线上，则两点 P，Q 称为关于二次曲线**共轭**．对偶地，如果 p，q 中每一直线都在另一直线关于二次曲线的极点上，则两条直线 p，q 称为关于二次曲线**共轭**．

在习题 9.5 中我们将证明

定理 9.11 若完全四线形的两对对顶点是关于二次曲线的共轭点，则第三对对顶点也是关于此曲线的共轭点．

5．自配极三角形

如果一个三角形的每个顶点都是其对边关于二次曲线的极点，则称这个三角形关于此曲线是**自配极**的．显然，这时三角形的每一边都是它所对顶点的极线．

由定理 9.2 可推出

定理 9.12 若一个完全四点形的四个顶点是二次曲线上的四个不同点，则它们的对边点依次是关于这二次曲线的一个自配极三角形的顶点．

定理 9.12 及其对偶，提供了具有一已知点(直线)作为其顶点(边)的关于二次曲线的自

配极三角形的简单作法．这里的已知点（直线）不属于曲线．事实上，如果过已知点 A 作两条割线交曲线于四个不同的点，则这四个点所确定的完全四点形的对角三角形的另外两个顶点 B, C 连同点 A 都是关于二次曲线的一个自配极三角形的顶点．

在习题 9.6 中，我们将证明

定理 9.13 若一个三角形内接于二次曲线，则其任一边的共轭线与另两边相交于一对共轭点．

及其逆定理

定理 9.14 若一个三角形内接于二次曲线，则与它的两边交于一对共轭点的任一直线是第三边的共轭线．

它们的对偶是：

定理 9.13′ 若一个三角形外切于二次曲线，则它的任一顶点的共轭点与另两个顶点的连线是共轭的．

定理 9.14′ 若一个三角形外切于二次曲线，且一点与它的两顶点连线共轭，则这点是第三个点的共轭点．

§9.2 问题及其解

9.1 证明：四个顶点在二次曲线上的完全四点形和四条边都是这条曲线在这些点处的切线的完全四线形有相同的对角三角形．

证明：考虑图 9-2 中的完全四点形 XBB_1X_1 和完全四线形 xbb_1x_1，它们符合定理的条件．令 $x\cdot x_1=T$, $b\cdot b_1=U$, $x\cdot b=V$, $x_1\cdot b_1=W$, $x_1\cdot b=Y$, $x\cdot b_1=Z$．xbb_1x_1 的对角三角形的边是 TU, VW, YZ，根据定理 9.3，$TU=MN$, $VW=PM$, $YZ=PN$，但这些正是 XBB_1X_1 的对角三角形的边，于是命题成立．

9.2 证明：若 B 是任一定点，b_1 是二次曲线上任一固定切线，X 是二次曲线上一个动点，x 是二次曲线在 X 点的切线，则当 X 变动时，有 $(BX,\ \cdots)\barwedge(b_1\cdot x,\ \cdots)$．

证明：参看图 9-2，其中 B, b_1, B_1, $b''=BB_1$, X_1, Y 是定点和定直线，当 X 在二次曲线上变动时，根据定义有：

$$(BX,\ \cdots)\barwedge(X_1X,\ \cdots).$$

但

$$(X_1X,\ \cdots)\overset{b''}{\barwedge}(P,\ \cdots)\overset{Y}{\barwedge}(b_1\cdot x,\ \cdots),$$

点 P 在 b'' 上变动，于是有 $(BX,\ \cdots)\barwedge(b_1\cdot x,\ \cdots)$．

这个证明适用于 b_1 不是 B 处切线的情况，当 b_1 取作 B 处切线 b 时，其证明留给读者．

9.3 设二次曲线 $\mathscr{C}$ 由它的五点 A, B, C, D, E 给出，作出：

(a) 任一点关于 $\mathscr{C}$ 的极线．

(b) 任一直线关于 $\mathscr{C}$ 的极点．

解：取 B, C 为生成 $\mathscr{C}$ 的射影线束的中心．

(a) 参看图 9-3(a)，令 $XB=b$, $XC=c$，假设 X 关于 $\mathscr{C}$ 的极线是 b, c 于 B'', C''，则 X, B'' 调和分隔 $\mathscr{C}$ 的在 b 上的两点，X, C'' 调和分隔 $\mathscr{C}$ 的在 c 上的两点，那么作图步骤是：(i) 分

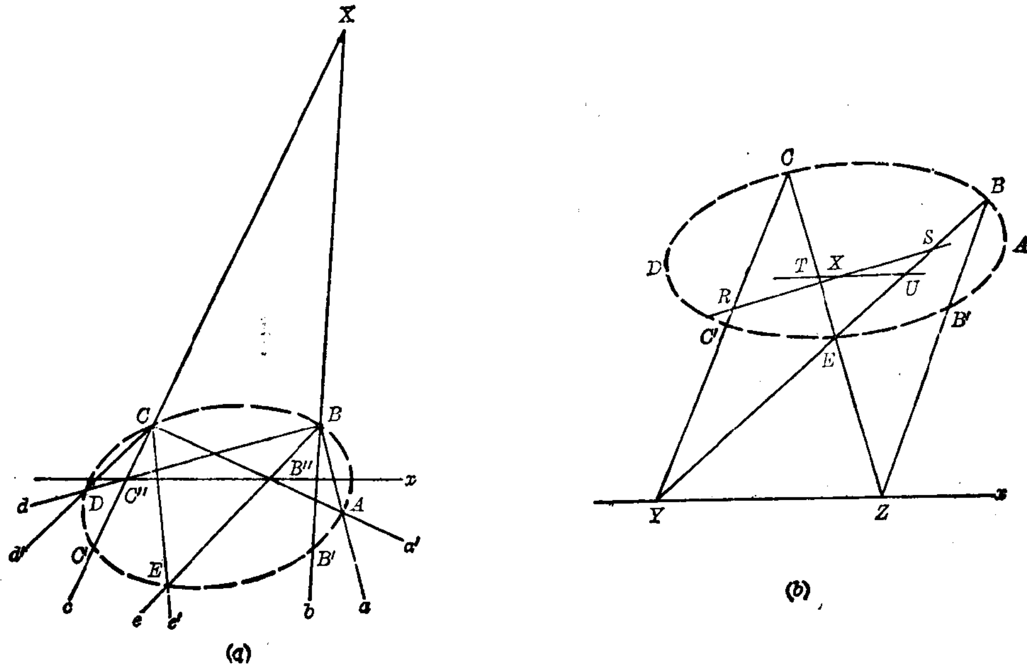


图 9-3

别确定 $\mathscr{C}$ 的在 b 和 c 上的第二个点 B' 和 C'; (ii)分别确定关于 B, B' 和 C, C' 的调和共轭点 B'', C''; (iii)连结 B'', C''.

(b)参看图 9-3(b), 令 $BE\cdot x=Y$, $CE\cdot x=Z$, 根据定理 9.9, x 的极点同时在 Y 和 Z 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上, 作图步骤是: (i)分别确定 $\mathscr{C}$ 的在 BZ 和 YC 上的第二个点 B' 和 C'; (ii)分别确定 Y 关于 C, C' 和 E, B 的调和共轭点 R 和 S, 及 Z 关于 E, C 和 B, B' 的调和共轭点 T 和 U; (iii)作 RS 和 TU 的交点(或确定 x 上任意两点的极线的交点).

9.4　证明: 若一个点在一条直线上变动(形成点列), 则它关于给定二次曲线的极线在与此点列成射影相关的线束中变动.

证明: 虽然结论是相同的, 但证明要分直线是或不是此二次曲线的切线两种情况. 首先假设点 P(见图 9-4(a))在一条非切线 m 上变动, m 关于二次曲线的极点是 M. 取 R 为二次曲线上的一个定点. 使直线 PR 和 RM 在二次曲线上分别确定点 S, T, 直线 PT 确定二次曲线上的点 U. 再设 $RU\cdot ST=N$. 根据作法, PMN 是完全四点形 $RSTU$ 的对角三

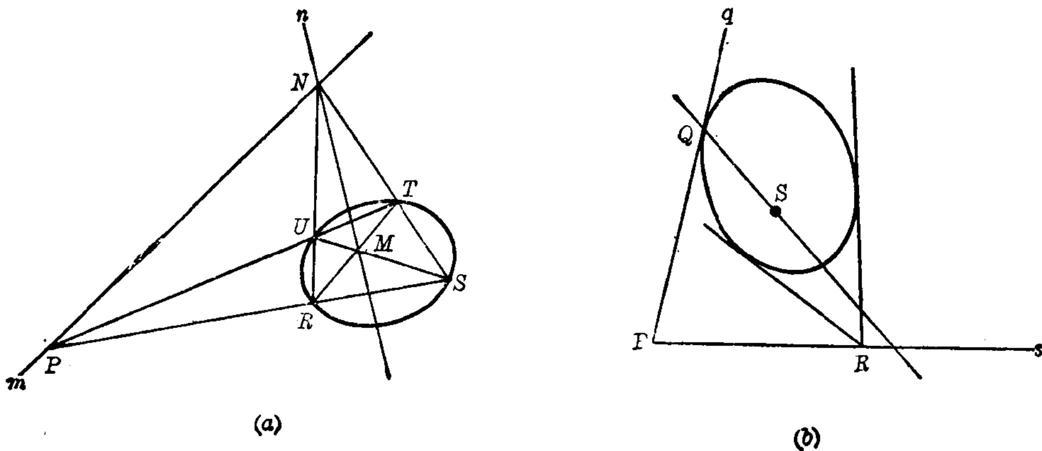


图 9-4

角形，$MN=n$ 是 P 的极线．现在，在图中，直线 m 和点 R, M, T 是固定的，显然，当 P 在 m 上变动时，直线 n 在 M 上变动，则由(i)$(P, \cdots)\overline{\wedge}(RP, \cdots)\wedge(TS, \cdots)\overline{\wedge}(MN, \cdots)$，可得 $(P, \cdots)\wedge(MN, \cdots)$．

其次，假定 P 点(见图 9-4(b))在直线 q 上变动，q 切二次曲线于 Q，设 R 是二次曲线两条固定切线的交点，令 $PR=S$，并作出它的极点 S，因为 P 在 s 上，根据定理 9.9，它的极线在 S 上，又因为 P 在 q 上，它的极线在 Q 上，于是 QS 是 P 的极线．现在，当 P 在 q 上变动时，有

(ii) $(P, \cdots)\overline{\wedge}(RP, \cdots)\wedge(S, \cdots)\overline{\wedge}(QS, \cdots)$ 且 $(P, \cdots)\wedge(QS, \cdots)$．

9.5 证明：若完全四线形的两对对顶点是关于二次曲线的共轭点，则第三对对顶点也是关于此二次曲线的共轭点．

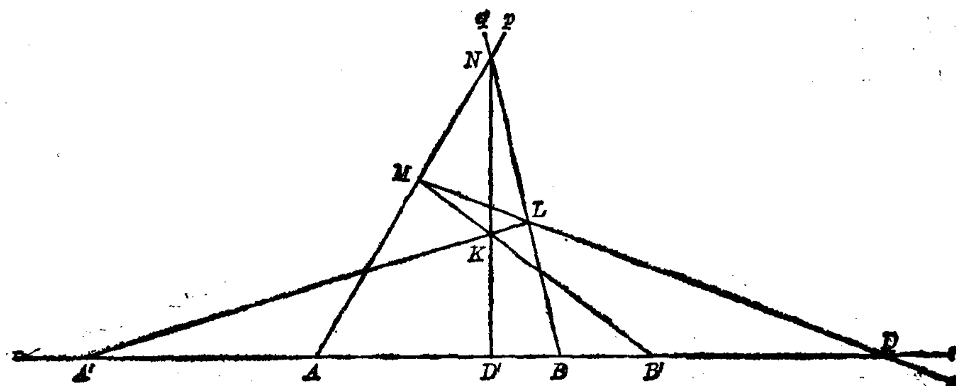


图 9-5

证明：在图 9-5 中，设 A 和 L, B 和 M 是完全四线形 $pqrs$ 的两对对顶点，它们关于二次曲线 $\mathscr{C}$(未画出)是共轭的．我们要证明 D 和 N 也关于 $\mathscr{C}$ 共轭．A, B, D 关于 $\mathscr{C}$ 的极线和边 r 的交点分别记为 A', B', D'，现在 A', B', D' 也是 A, B, D 关于在直线 r 上的 $\mathscr{C}$ 的两点的调和共轭点．所以 A, A'; B, B'; D, D' 是 r 上点的一个对合的三对互逆点．

根据定理 6.4，直线 $A'L$, $B'M$, $D'N$ 在一点 K 上，因为 A' 和 L 都在 A 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上，所以这条极线是 $A'L$，同理，$B'M$ 是 B 关于 $\mathscr{C}$ 的极线，于是 K 是 r 的极点，而且 D 在 r 上，D' 在 D 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上，所以 $D'K$ 是 D 的极线．最后，因为 $D'K$ 在 N 上，所以 D 和 N 是关于 $\mathscr{C}$ 的共轭点．

9.6 证明：若三角形 PQR 内接于二次曲线，则与它任一边共轭的直线交其余两边于一对共轭点，反之亦然．

证明：假设 A 是与 PQ 共轭的已知直线上的极点，则 A 在 PQ 上(见图 9-6)，设 AR 再交二次曲线于 S，作完全四点形 $PQRS$，其对角三角形是 ABC，现在 ABC 是关于二次曲线的自配极三角形，直线 BC(它的极点在 PQ 上)，满足命题的假设，而且，点 B, C 是关于二次曲线的共轭点．于是命题得证．

反之，设 A' 是已知直线的极点，这条直线交 PR 和 QR 于一对共轭点，设 $A'R$ 再交二次曲线于 S，作完全四点形 $PQRS$．在这个四点形中，PR 上的 B 和 QR 上的 C(它们是对角三角形的顶点)是一对共轭点，于是直线 BC 满足命题的假设．因为 BC 的极点是唯一的，所以 A' 就是 PQ 上的 A 点，于是 BC 和 PQ 是共轭的．命题得证．

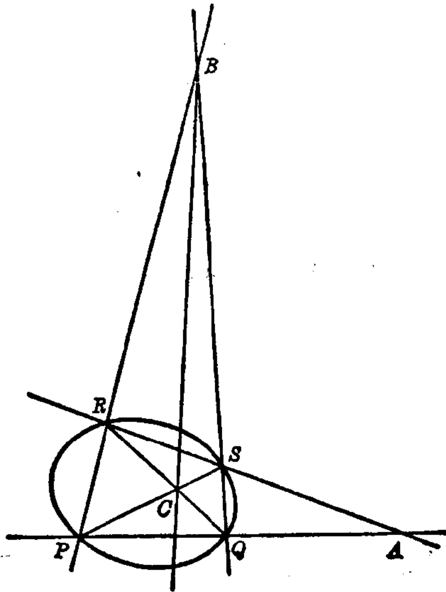


图 9-6

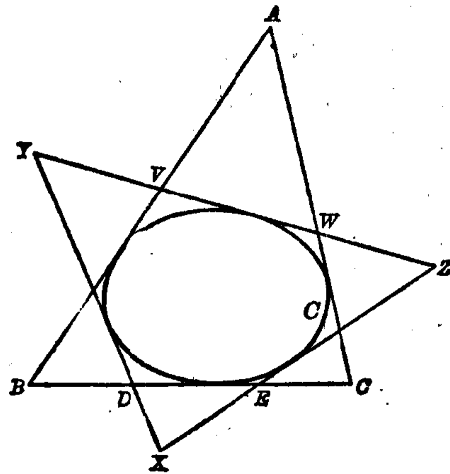


图 9-7

9.7 证明：若三角形 ABC 和三角形 XYZ 都外切于一条二次曲线 $\mathscr{C}$，则它们的六个顶点在另一条二次曲线 $\mathscr{C}'$ 上.

证明：把图 9-7 中的二次曲线 $\mathscr{C}$ 看作是直线 BC 和 YZ 上的两个射影束的对应点的连线生成的. 令 $BC\cdot XY=D$, $BC\cdot XZ=E$; $YZ\cdot AB=V$, $YZ\cdot AC=W$. 则

$$(B, D, E, C)\barwedge(V, Y, Z, W).$$

现在 $(XB, XD, XE, XC)\overline{\barwedge}(B, D, E, C)\barwedge(V, Y, Z, W)\overline{\barwedge}(AV, AY, AZ, AW)$，所以 $(XB, XD, XE, XC)\barwedge(AV, AY, AZ, AW)$，根据定义，这个射影生成的二次曲线包括 A, X, B, Y, C, Z.

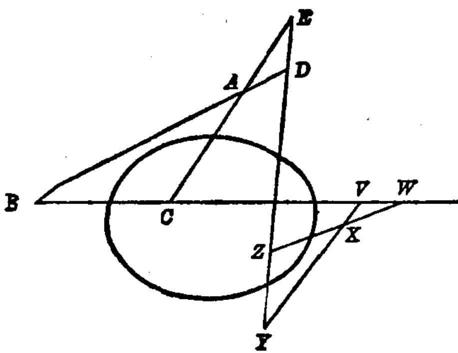


图 9-8

9.8 证明：若两个三角形是关于一条二次曲线自配极的，则它们的六个顶点在一条二次曲线上.

证明：考虑图 9-8 中关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的自配极三角形 ABC 和 XYZ. 令 $BC\cdot XY=V$, $BC\cdot XZ=W$, $YZ\cdot AB=D$, $YZ\cdot AC=E$. 因为 V 在 BC 上，它关于 $\mathscr{C}$ 的极线在 A 上，又因为 V 在 XY 上，它的极线在 Z 上(定理 9.9)，所以 V 关于 $\mathscr{C}$ 的极线是 AZ. 同理，W, D, E 关于 $\mathscr{C}$ 的极线分别是 AY, XC, XB，根据定理 9.10 和 2.10，有

$$(B, W, V, C)\barwedge(AC, AY, AZ, AB)\overset{YZ}{\overline{\barwedge}}(E, Y, Z, D)$$
$$\barwedge(XB, XZ, XY, XC)\barwedge(XC, XY, XZ, XB),$$

所以 $(AC, AY, AZ, AB)\barwedge(XC, XY, XZ, XB)$，因而 A, B, C, X, Y, Z 在一条二次曲线上.

9.9 证明：若二次曲线 $\mathscr{C}$ 的二条切线变动时，它们切点的连线切于另一条二次曲线 $\mathscr{C}'$，则切线的交点在第三条二次曲线上.

证明：设 x 是 $\mathscr{C}'$ 的动切线，那么它关于 $\mathscr{C}$ 的极点 X 是 $\mathscr{C}$ 的 x 上两点处切线的交点，我们要证明，当 x 在 $\mathscr{C}'$ 上变动时，X 在一条二次曲线 $\mathscr{C}''$ 上变动.

记 $\mathscr{C}'$ 的两条定切线为 a, b，令 $a\cdot x=X_1$, $b\cdot x=X_1'$，则 $\mathscr{C}'$ 可以看作是由射影：

$$a(X_1, \cdots)\barwedge b(X_1', \cdots)$$

生成的. a, b, x 是关于 $\mathscr{C}$ 的极点，分别记为 A, B, X，又因为 x 变动时，a, b 不动. 所以 X 变动时，A, B 也不动. 现在 AX 是 X_1 关于 $\mathscr{C}$ 的极线，BX 是 X_1' 关于 $\mathscr{C}$ 的极线，当 X_1 在 a 上变动时，它关于 $\mathscr{C}$ 的极线在 A 上变动，根据定理 9.10，有

$$a(X_1, \cdots)\barwedge(AX, \cdots),$$

同理 $$b(X_1', \cdots)\barwedge(BX, \cdots).$$

于是 $$(AX, \cdots)\barwedge(BX, \cdots),$$

即这个射影生成二次曲线 $\mathscr{C}''$.

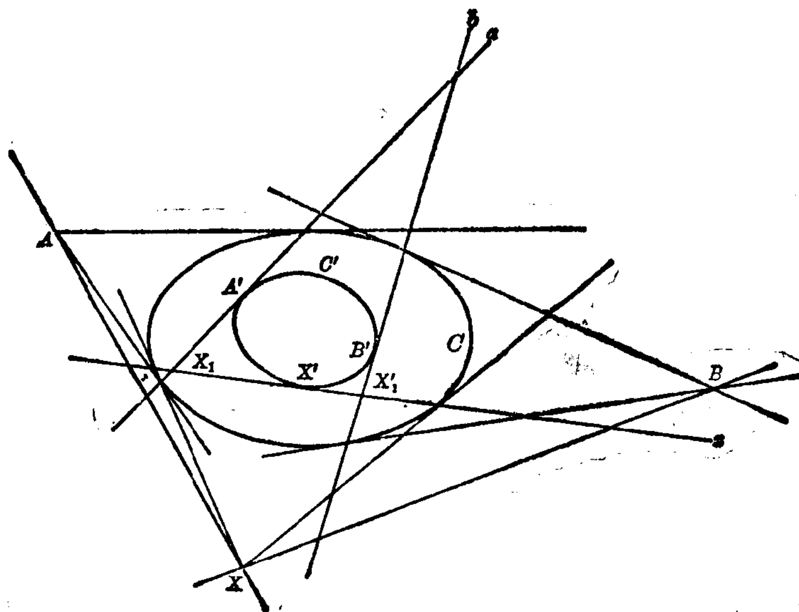


图 9-9

§9.3 补 充 题

9.10 完成定理 9.7 的证明. 即证明：若 B 是二次曲线上的任一固定点，X 是二次曲线上的动点，b, x 分别是二次曲线在 B, X 处的切线，则 $(BX, \cdots)\barwedge(b\cdot x, \cdots)$.

9.11 对于一条完全画出的二次曲线，作出 P 的极线. (a) P 在曲线内部；(b) P 在曲线上；(c) P 在曲线外部.

9.12 对于习题 9.11 中的二次曲线，作出直线 p 的极点. (a) p 和二次曲线有两个公共点；(b) p 切于二次曲线；(c) p 和二次曲线没有实交点.

9.13 证明定理 9.9. 要考虑三种情况：P 在曲线内部；P 在曲线上；P 在曲线外部.

9.14 二次曲线 $\mathscr{C}$ 由其上四个点和其中一点处的切线给出，作出一已知点关于 $\mathscr{C}$ 的极线和一已知直线关于 $\mathscr{C}$ 的极点

提示：设 $\mathscr{C}$ 上的 A, B, C, D 和在 B 点的切线 b 已给出，令 X 是不在 $\mathscr{C}$ 上的一点，取 A,

B 作为生成 $\mathscr{C}$ 的线束的中心，作出 XA, XB, XC 交 $\mathscr{C}$ 的第二个点 A', B', C', 考虑完全四点形 $AA'BB'$ 和 $BB'CC'$.

9.15 一条二次曲线 $\mathscr{C}$ 由其上三点和其中两点处的切线给出．作一个已知点关于 $\mathscr{C}$ 的极线和一已知直线关于 $\mathscr{C}$ 的极点.

9.16 作出一已知点关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的极线和一已知直线关于 $\mathscr{C}$ 的极点：(a) $\mathscr{C}$ 由它的四条切线和其中一条切线上切点给出；(b) $\mathscr{C}$ 由它的三条切线和其中两条的切点给出.

提示：先找出足够的切点，然后利用习题 9.15.

9.17 作出二次曲线 $\mathscr{C}$，已知：

(a) 它的三个点和不在 $\mathscr{C}$ 上的点 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线 p;

(b) 它的一个点和不在 $\mathscr{C}$ 上的两个不同点 P, Q 的极线 p, q;

(c) 它的两个点和一个自配极三角形．为什么这里 $\mathscr{C}$ 不一定是唯一的？

(d) 它的一个点和在这点处的切线以及关于它的一个自配极三角形.

9.18 若 A, B, C, D 是一条直线上的四点，使得 $H(A, B; C, D)$．证明 A, B, C, D 关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的极线形成一个调和集.

9.19 证明：若一个三角形的两个顶点是它们的对边关于一条已知二次曲线的极点，则第三个顶点是它的对边的极点.

9.20 证明：若 P, Q 都是第三点 R 关于一已知二次曲线的共轭点，则 R 关于此二次曲线的极线是 PQ.

9.21 证明：若 XYZ 是一个关于二次曲线的自配极三角形，则它有且仅有一个顶点在曲线内部.

9.22 在图 9-7 中，证明 A, D, E, X, V, W 在一条二次曲线上.

9.23 在图 9-8 中，证明已知三角形的六条边在一条二次曲线上.

9.24 设 XYZ 是一个关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的自配极三角形，(a) 在 $\mathscr{C}$ 上任取一点 A，作一个内接于 $\mathscr{C}$ 且以 XYZ 为对角三角形的完全四点形，这个四点形是唯一的吗？(b) 在 $\mathscr{C}$ 上任取一条直线 a，作一个外切于 $\mathscr{C}$ 且以 XYZ 为对角三角形的完全四线形，这个四线形是唯一的吗？

9.25 验证习题 9.4 中的 (i) 和 (ii).

提示：(i) 只要用到前面的定义；(ii) 还需用到 (i).

9.26 证明：若 Q, S 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 上两个点，A, C 是 QS 关于 $\mathscr{C}$ 的任一共轭直线上的一对共轭点，则 $AQ \cdot CS$ 和 $AS \cdot CQ$ 在 $\mathscr{C}$ 上.

提示：设 AQ, AS 分别与 $\mathscr{C}$ 交于 P, R，则 A, C 是四点形 $PQRS$ 的对边点.

9.27 证明：与一个三角形的两边交于两个关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的共轭点的直线通过这个三角形第三边的极点.

9.28 叙述并证明习题 9.9 的对偶.

9.29 证明：若 A 和 A' 是关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的共轭点，AA' 交 $\mathscr{C}$ 于点 P, Q，则 $H(P, Q; A, A')$.

提示：设 A 在 C 外，考虑以 P, Q 为顶点，A 为对边点的任一内接四点形.

9.30 证明：若在点 C 上的直线 a 和 b 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 的两条固定切线，x, X 是 $\mathscr{C}$ 的另一条切线及其切点，则 $a \cdot x$ 和 $b \cdot x$ 被 X 和 Y 调和分隔．其中 Y 是 x 和点 C 的极线

的交点.

9.31 设 p, q 是两条关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 不共轭的直线，证明：(a) p 上的每一点 P 在 q 上有一共轭点 Q，(b)若 Q 如(a)中那样确定，则点列 $p(P, \cdots)$ 和 $q(Q, \cdots)$ 是射影对应的，仅当 $p\cdot q$ 在 $\mathscr{C}$ 上时，这个射影是一个透视.

9.32 证明：当 X 在一已知直线上变动时，X 关于两条已知二次曲线的极线的交点在第三条二次曲线上.

9.33 证明：若一已知二次曲线的每条切线交另一二次曲线 $\mathscr{C}$ 于两点．则 $\mathscr{C}$ 在这两点的切线的交点在第三条二次曲线上.

提示：利用图 9-9.

9.34 证明：若两条二次曲线 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 有四个公共点和四条公共切线，则也有一个公共的自配极三角形.

提示：设 P, Q, R, S 四个公共点，A, B, C 是以四条切线为边的四线形的对角三角形的顶点，PA 交 BC 于 X，再交两条二次曲线于 X_1 和 X_2，那么 $H(P, X_1; A, X)$, $H(P, X_2; A, X)$，且点 A, P, Q 共线．同理，点 A, R, S 共线，A 是 $PQRS$ 的对角三角形的一个顶点.

9.35 证明：若两个完全四点形有相同的对角三角形，则它们的八个顶点或者(a)四点一组分别在二条直线上或者(b)在一条二次曲线上.

提示：设四点形为 $PQRS$ 和 $P'Q'R'S'$，以 $A=PQ\cdot RS=P'Q'\cdot R'S'$, $B=PR\cdot QS=P'R'\cdot Q'S'$, $C=PS\cdot QR=P'S'\cdot Q'R'$ 为对边点．对于(a)，假定 P, Q, P' 共线，证明 P, Q, P', Q' 一定共线；对于(b)假定八个顶点中任何三点都不共线，把 P, Q, R, S, P' 上的二次曲线记为 $\mathscr{C}$，利用共轭点 A 和 $D=AP'\cdot BC$，并应用习题 9.29.

9.36 证明：若两条二次曲线交于四个点，则它们在这些点处的八条切线或者(a)四条一组分别在两个点上，或者(b)是一条二次曲线的包络.

第十章　巴斯卡定理和布利安桑定理

§10.1　基本内容

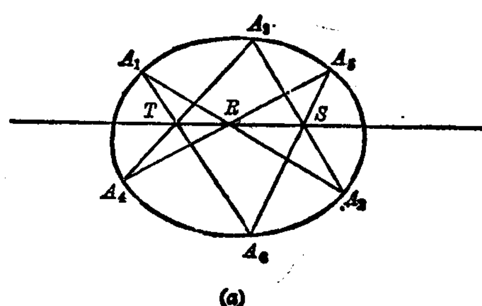
1. 巴斯卡定理

巴斯卡在1640年证明了(见图10-1(a))

定理10.1(**巴斯卡定理**)　若一个简单六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 内接于一条二次曲线，则它的三组对边的交点

$$R=A_1A_2\cdot A_4A_5,\ S=A_2A_3\cdot A_5A_6,\ T=A_3A_4\cdot A_6A_1$$

共线(证明见习题10.1).



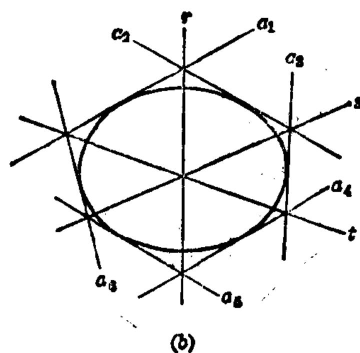


图　10-1

定理10.1中的直线 RST 称为六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的巴斯卡线.

巴斯卡定理的逆定理是:

定理10.2　若一个简单六边形的三组对边的交点共线，则这个六边形的顶点在一条二次曲线上.

这个定理也是成立的，而且此定理给出了由五个给定的点(其中没有三个点共线)确定的二次曲线的另一种作法(证明见习题10.2. 作法见习题10.3).

对于由两个不同点列组成的奇异二次曲线，巴斯卡定理变为巴普斯定理. 因此，巴普斯定理有时称为巴普斯-巴斯卡定理.

2. 布利安桑定理

布利安桑在1806年证明了巴斯卡定理的对偶(见图10-1(b)):

定理10.1′(**布利安桑定理**)　若一个简单六边形 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 外切于一条二次曲线，则它的三组对顶点

$$r=(a_1\cdot a_2)(a_4\cdot a_5),\ \ s=(a_2\cdot a_3)(a_5\cdot a_6),\ \ t=(a_3\cdot a_4)(a_6\cdot a_1)$$

的连线共点(证明见习题10.4).

定理 10.1′ 中的点 $r\cdot s\cdot t$ 称为六边形 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 的布利安桑点.

布利安桑定理的逆定理是:

定理 10.2′ 若一个简单六边形的三组对顶点的连线共点,则这个六边形的边外切于一条二次曲线.

这个定理也是成立的,并且给出了由五条给定直线(其中没有三条共点)确定的二次曲线的另一种作法.

对于由两个不同线束组成的奇异二次曲线,布利安桑定理变成巴普斯定理的对偶.

3. 巴斯卡定理的特殊情况

在巴斯卡定理的证明中,我们采用的是在六边形的两个顶点 A_2 和 A_4(由我们选取)上的两个线束之间的射影(见图 10-1(*a*))关系:

(i) $(A_2A_1,\ A_2A_3,\ A_2A_5,\ A_2A_6)\barwedge(A_4A_1,\ A_4A_3,\ A_4A_5,\ A_4A_6)$. 在这个射影下,作为 A_2 上的线束中的一条直线 A_2A_4 的对应直线是二次曲线在点 A_4 处的切线 t. 于是 (i) 也可以改写为:

(ii) $(A_2A_1,\ A_2A_3,\ A_2A_4,\ A_2A_6)\barwedge(A_4A_1,\ A_4A_3,\ t,\ A_4A_6)$ 这个射影涉及一个内接于二次曲线的简单五边形 $A_1A_2A_3A_4A_6$ 和二次曲线在五边形的一个顶点处的切线(见图 10-2),于是,如在习题 10.1 中一样,我们有:

$$(U,\ S,\ A_4,\ A_6)\overline{\barwedge}(A_2A_1,\ A_2A_3,\ A_2A_4,\ A_4A_6)\barwedge(A_4A_1,\ A_4A_3,\ t,\ A_4A_6)$$
$$\overline{\barwedge}(A_1,\ T,\ V,\ A_6),$$

所以
$$(U,\ S,\ A_4,\ A_6)\overline{\barwedge}(A_1,\ T,\ V,\ A_6)$$

且 $R=UA_1\cdot VA_4$ 在 ST 之上,我们证明了:

图 10-2

图 10-3

定理 10.3 若一个简单五边形内接于二次曲线,则在它的一个顶点处的切线与这点的对边的交点和其它两组不相邻的边之交点共线.

如果我们把五边形及其切线看成是一个退化的六边形,则更方便. 这个退化六边形的两顶点(在这里是 A_4 和 A_5)重合,并记此点为 $A_{4,5}$,在此点处的切线记为 $t_{4,5}$(注意,当 A_4 和 A_5 沿着二次曲线趋于重合时,六边形的边 A_4A_5 趋于极限位置——切线 $t_{4,5}$). 根据连续性

原理，它首先由庞塞勒公式化，我们假定，图形在连续变化时，它的某一性质保持不变，那么这一性质在它的极限位置时成立。于是 $A_1A_2 \cdot t_{4,5}=R$, $A_2A_3 \cdot A_6A_{4,5}=S$, $A_3A_{4,5} \cdot A_6A_1=T$，正如定理所需要的那样，$R$, S, T 共线。

同理可得：

定理 10.4　若一个简单四边形内接于二次曲线，则在它的一组对顶点处的切线的交点，和它的两组对边的交点共线。

定理 10.5　若一个三角形内接于二次曲线，则在它的各顶点处的切线分别与其它对边的交点共线。

4. 布利安桑定理的特殊情况

取上节的对偶或实施上节的类似过程。我们得到

定理 10.3′　若一个简单五边形外切于二次曲线，则它的一边上的切点和这边所对顶点的连线与其它两组不相邻顶点的连线共点。

定理 10.4′　若一个简单四边形外切于二次曲线，则在它的两条对边上的切点的连线，和四边形的两组对顶点的连线共点。

定理 10.5′　若一个三角形外切于二次曲线，则各顶点与其对边上的切点的连线共点。

5. 逆　定　理

定理 10.3～10.5 的逆定理是：

定理 10.6　若过简单五边形一顶点的直线和这顶点的对边的交点与其余两组不相邻边的交点共线，则此直线是外接于这五边形的二次曲线的切线。

定理 10.7　若在一简单四边形一对对顶点上各作一条直线，这两条直线交在四边形对边交点的连线上，则这两条直线是外接于四边形的二次曲线的切线。

定理 10.8　若过一三角形每个顶点的直线分别与这顶点的对边相交于共线三点，则这三条直线都是外接于三角形的二次曲线的切线。

这些定理都成立，而且定理 10.3′～10.5′ 的逆定理（定理 10.6～10.8 的对偶）也成立。这里的每一个定理给出了第八章提出的那些作图问题的另一作法。为此，可参看习题 10.5～10.7.

6. 相伴 n 点组和 n 线组

内接于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的任何简单 n 点形（顶点在 $\mathscr{C}$ 上的任何完全 n 点形）和由 $\mathscr{C}$ 在这些顶点的切线组成的简单 n 线形（边是 $\mathscr{C}$ 在 n 点形的顶点处的切线的完全 n 线形）称为*相伴的*.

考虑内接于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的简单六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$（见图 10-4）及其相伴 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$，内接六边形的巴斯卡线是 $p=RST$，令 $a_1 \cdot a_2=P_1$, $a_2 \cdot a_3=P_2$, $a_3 \cdot a_4=P_3$, $a_4 \cdot a_5=P_4$, $a_5 \cdot a_6=P_5$, $a_6 \cdot a_1=P_6$. 因为 P_1P_4 是 R 关于 $\mathscr{C}$ 的极线，P_2P_5 是 S 的极线，P_6P_3 是 T 的极线，这些直线的交点 B 是 p 关于 $\mathscr{C}$ 的极点。点 B 也是外切六边形的布利安桑点，因而有

定理 10.9　内接于二次曲线 C 的任一简单六边形的巴斯卡线是它关于 C 的相伴六边形的布利安桑点的极线。反之，外切于二次曲线 C 的任一简单六边形的布利安桑点是关于

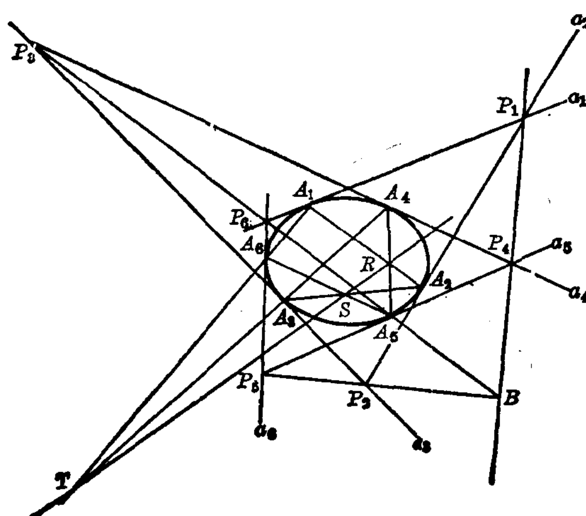


图 10-4

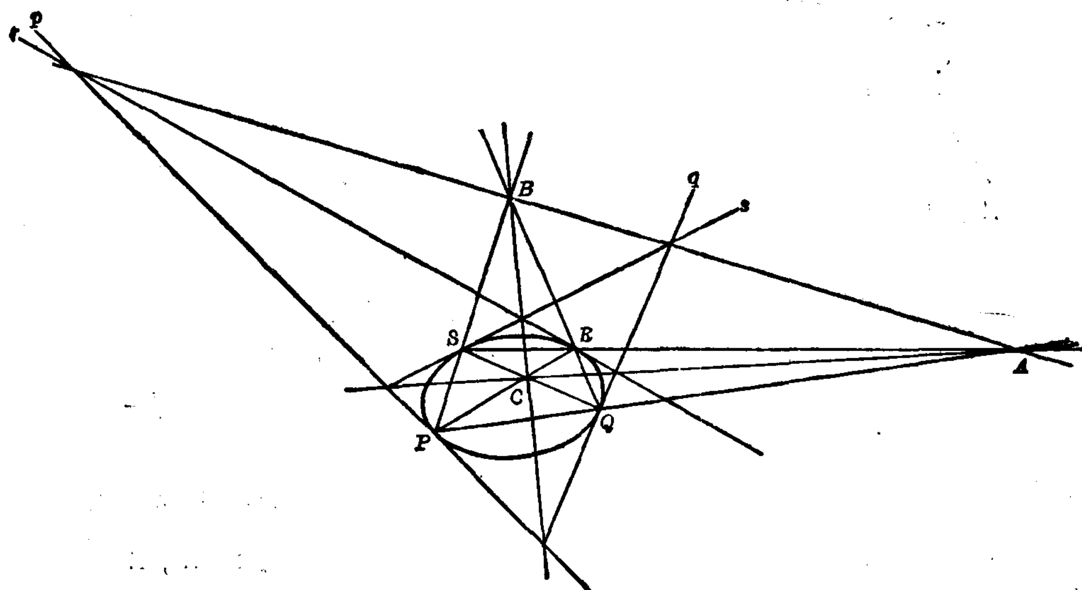


图 10-5

C 的相伴六边形的巴斯卡线的极点.

下面考虑顶点 P, Q, R, S 在二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的完全四点形(见图 10-5)和它的相伴完全四线形,应用定理 10.4 于四点形

$PQRS$,有 $PQ\cdot RS=A$, $PS\cdot QR=B$, $p\cdot r$, $q\cdot s$ 共线.

$PRSQ$,有 $PR\cdot QS=C$, $PQ\cdot RS=A$, $p\cdot s$, $q\cdot r$ 共线.

$PSQR$,有 $PS\cdot QR=B$, $PR\cdot QS=C$, $p\cdot q$, $r\cdot s$ 共线.

$PQRS'$ 的对角三角形的顶点是A, B, C,$pqrs$ 的对角三角形的边是$(p\cdot q)(r\cdot s)$, $(p\cdot s)(q\cdot r)$, $(p\cdot r)(q\cdot s)$,它们依次是直线 BC, CA, AB. 我们证明了:

定理 10.10 顶点在二次曲线上的任一完全四点形和它关于此曲线的相伴完全四线形有相同的对角三角形.

§10.2 问题及其解

10.1 证明：若一个简单六边形内接于二次曲线，则它三组对边的交点共线.

证明：在图 10-6 中把二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 作为简单六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的顶点，令 $A_1A_2\cdot A_4A_5=R$, $A_2A_3\cdot A_5A_6=S$, $A_3A_4\cdot A_6A_1=T$, 我们要证明 R, S, T 共线.

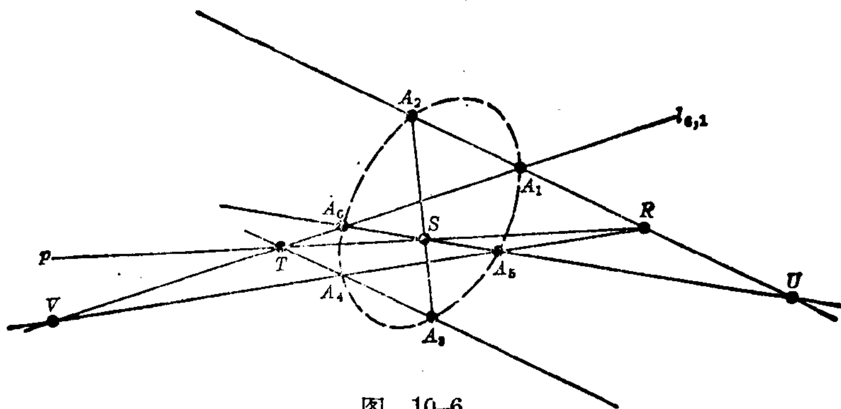


图 10-6

令
$$A_1A_2\cdot A_5A_6=U,\ A_1A_6\cdot A_4A_5=V.$$
从$(U, S, A_5, A_6)\overline{\wedge}(A_2A_1, A_2A_3, A_2A_5, A_2A_6)\overline{\wedge}(A_4A_1, A_4A_3, A_4A_5, A_4A_6)\overline{\wedge}(A_1, T, V, A_6)$，可得
$$(U, S, A_5, A_6)\overline{\wedge}(A_1, T, V, A_6).$$
但是这是一个透视. 于是 A_1U, ST, A_5V 共点于 R，所以 R, S, T 共线.

10.2 证明：若一个简单六边形三组对边的交点共线，则六边形的顶点在一条二次曲线上.

证明：考虑图 10-6 中的简单六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, $R=A_1A_2\cdot A_4A_5$, $S=A_2A_3\cdot A_5A_6$, $T=A_3A_4\cdot A_6A_1$ 共线. 令 $U=A_1A_2\cdot A_5A_6$, $V=A_1A_6\cdot A_4A_5$. 由 $(U, S, A_5, A_6)\overset{R}{\overline{\wedge}}(A_1, T, V, A_6)$可得射影
$$(A_2A_1, A_2A_3, A_2A_5, A_2A_6)\overline{\wedge}(A_4A_1, A_4A_3, A_4A_5, A_4A_6).$$
这个射影生成一条二次曲线，点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 根据定义都在其上.

10.3 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上五个不同点，利用定理 10.2 作出 $\mathscr{C}$ 上另一点.

解：如图 10-6 所示. 设已知点是 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 在 A_1 上任取一直线，它不同于 A_1 和其它已知点的连线. 问题可更具体地化为求这条直线与 $\mathscr{C}$ 的第二个交点 A_6. 为此，记这条直线为 $l_{6,1}$, 现在 $A_1A_2\cdot A_4A_5=R$, $A_3A_4l_{6,1}=T$, $RT=p$ 为六边形的巴斯卡线. 且 $S=A_2A_3\cdot p$, 但是 $S=A_2A_3\cdot A_5A_6$, 所以 A_6 在 A_5S 上，于是 $A_6=A_5S\cdot l_{6,1}$.

注意 1. 所选的直线实际上可能在 A_1 点与 $\mathscr{C}$ 相切. 在这种情况下，可选择在 A_1 上另一条直线作为 $l_{6,1}$，并重复上述作法.

注意 2. 附在已知点上的记号是无关紧要的，建议读者把已知点记为 A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, 在 A_3 选择某一直线作为 $l_{3,4}$，并确定在它上面的 A_4 点.

10.4 证明：若一个简单六边形外切于一条二次曲线，则它的三组对顶点的连线共点.

证明：在图 10-7 中，把二次曲线 $\mathscr{C}$ 的六条切线 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 作为简单六边形的边．令 $(a_1\cdot a_2)(a_4\cdot a_5)=r$，$(a_2\cdot a_3)(a_5\cdot a_6)=s$，$(a_3\cdot a_4)\cdot(a_6\cdot a_1)=t$，我们要证明 r, s, t 共点．

令 $(a_1\cdot a_2)(a_5\cdot a_6)=u$，$(a_1\cdot a_6)(a_4\cdot a_5)=v$．由

$$(u, s, a_5, a_6)\,\overline{\wedge}\,(a_2a_1, a_2a_3, a_2a_5, a_2a_6)$$
$$\overline{\wedge}\,(a_4a_1, a_4a_3, a_4a_5, a_4a_6)$$
$$\overline{\wedge}\,(a_1, t, v, a_6)$$

可得

$$(u, s, a_5, a_6)\,\overline{\wedge}\,(a_1, t, v, a_6).$$

但这是一个透视，于是 $a_1\cdot u$，$s\cdot t$，$a_5\cdot v$ 共线于 r，所以 r, s, t 共点．

图 10-7

注意：下列问题——已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上五条不同直线，即 $\mathscr{C}$ 的五条不同切线，作出 $\mathscr{C}$ 的另一条直线——是习题 10.3 的对偶，其作法留给读者解决．

10.5 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上四点和其中一点处的切线，确定 $\mathscr{C}$ 上另一点．

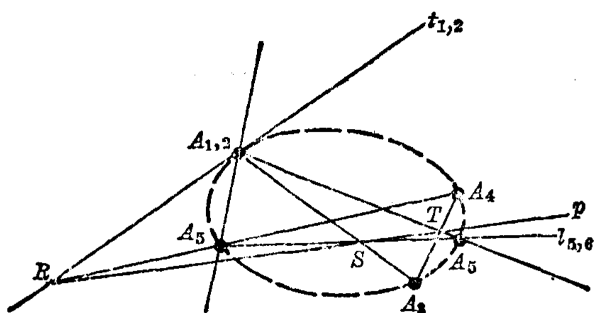


图 10-8

解：设已知点是 A_2, A_3, A_4, A_5 且切线在 A_2 上，记 A_2 为 $A_{1,2}$，切线为 $t_{1,2}$（见图 10-8）．在 A_5 上任取一直线，它不同于 A_5 与其它已知点的连线，记为 $l_{5,6}$．我们要作出 $l_{5,6}$ 和 $\mathscr{C}$ 的第二个交点 A_6．现在 $t_{1,2}\cdot A_4A_5=R$，$A_2A_3\cdot l_{5,6}=S$，$p=RS$ 是巴斯卡线，且 $T=A_3A_4\cdot p=A_3A_4\cdot A_6A_1$，于是 $A_6=TA_1\cdot l_{5,6}$．

10.6 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的三条直线（切线）和其中两条上的切点，作出 $\mathscr{C}$ 上另一条直线．

解：参看图 10-9，其中已知的部分是：直线 $a_{1,2}$ 及其切点 $T_{1,2}$，直线 $a_{3,4}$ 及其切点 $T_{3,4}$ 以及直线 a_5．在 a_5 上取一点，它不同于任何已知点，记为 $P_{5,6}$．我们要在 $P_{5,6}$ 上作出 C 上的直线 a_6，现在，$r=T_{1,2}(a_4\cdot a_5)$，$S=(a_2\cdot a_3)P_{5,6}$，$B=r\cdot s$ 是布利安桑点，且 $t=BT_{3,4}=T_{3,4}(a_6\cdot a_{1,2})$，于是 $a_6=P_{5,6}(a_{1,2}\cdot t)$．

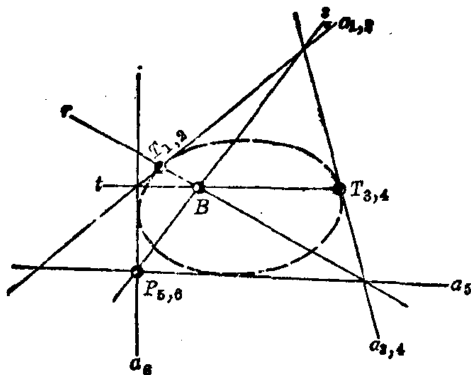


图 10-9

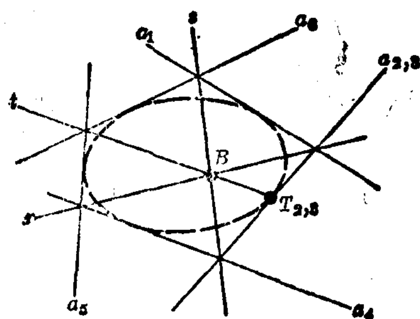


图 10-10

10.7　已知二次曲线$\mathscr{C}$上的五条直线，确定其中一条上的切点.

解：参看图 10-10，其中已知直线是 a_1, $a_{2,3}$, a_4, a_5, a_6; 我们要作出$a_{2,3}$上的切点$T_{2,3}$. 现在 $r=(a_1\cdot a_{2,3})(a_4\cdot a_5)$, $s=(a_{2,3}\cdot a_4)(a_6\cdot a_1)$, $B=r\cdot s$ 是布利安桑点，且 $t=B(a_5\cdot a_6)$，于是 $T_{2,3}=t\cdot a_{2,3}$.

10.8　利用巴普斯定理证明笛沙格双三角形定理.

证明：考虑图 10-11 中通过点 P 成透视的三角形，$A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$，我们要证明 $A_1A_2\cdot B_1B_2=L$, $A_2A_3\cdot B_2B_3=M$, $A_3A_1\cdot B_3B_1=N$ 共线，为了利用巴普斯定理，我们还必须有另外的共线三元点组，至少我们找出 $A_1A_3\cdot B_2B_3=S$, $A_1B_2\cdot A_3B_3=T$,

$$A_1A_2\cdot PS=U,\ B_1B_2\cdot PS=V.$$

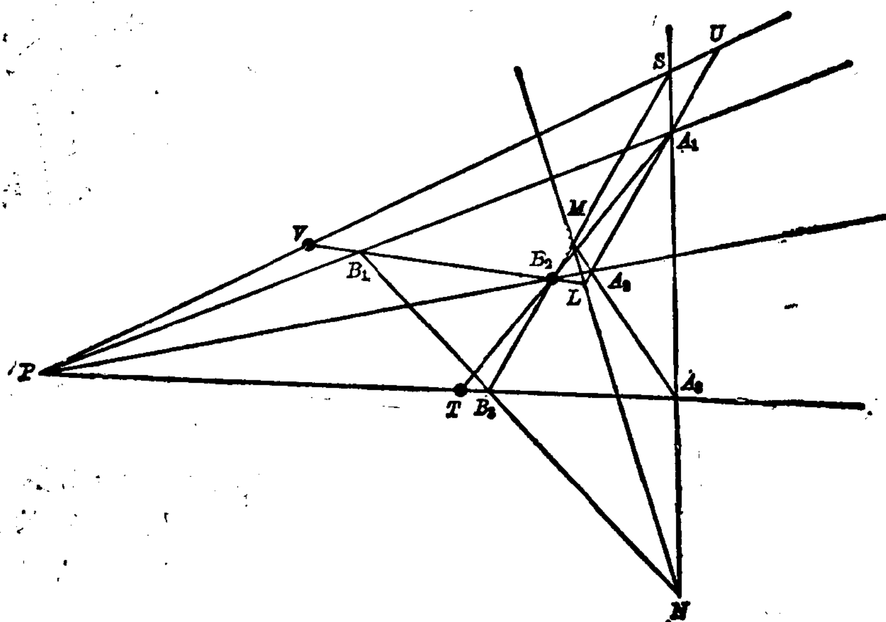


图　10-11

利用共线三元点组 P, B_2, A_2和 A_1, A_3, S，根据巴斯卡定理 $PA_3\cdot A_1B_2=T$, $PS\cdot A_1A_2=U$, $A_2A_3\cdot B_2S=M$ 共线.

同理，利用共线三元点组 P, A_1, B_1和B_2, B_3, S，我们得到 T, V, N 共线. 最后，利用共线三元点组 A_1, B_2, T 和 V, U, S，有 L, M, N 共线.

笛沙格定理的逆定理的证明留作练习.

§10.3　补　充　题

10.9　取五个不同点（其中任何三点都不共线），找出由它们确定的二次曲线上的若干个点.

10.10　取五条不同直线（其中任何三条都不共点），找出由它们确定的二次曲线上的若干条直线.

10.11　利用图 10-12 和图 10-12′，对于奇异二次曲线，证明巴斯卡定理和布利安桑定理.

提示：仿照习题 10.1 和 10.4.

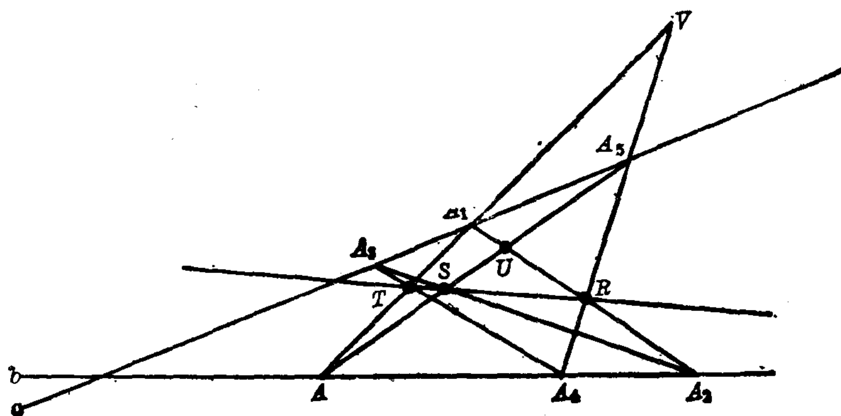


图 10-12

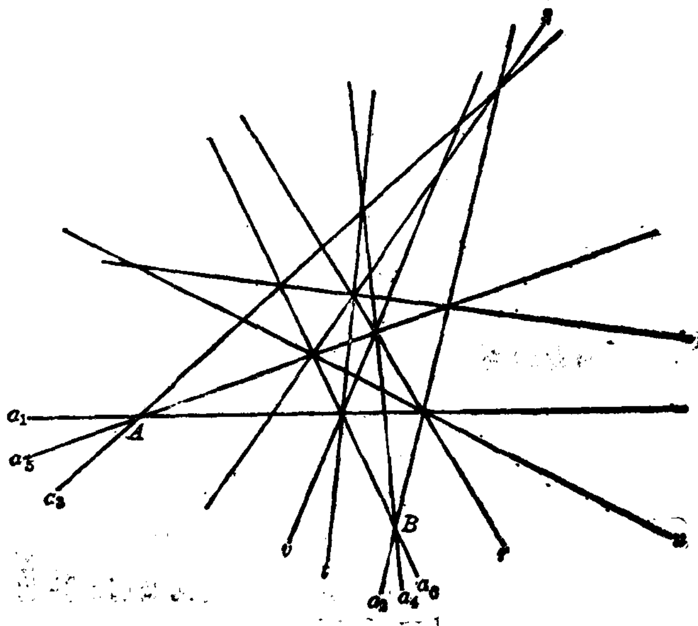


图 10-12'

10.12 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上五个不同点，作其中任意两点处 $\mathscr{C}$ 的切线.

10.13 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上四个不同点和其中一点处的切线，作在另外三点处的切线，再作 $\mathscr{C}$ 上的另一点及其切线.

10.14 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上三个不同点和其中两点处的切线，作：(a) $\mathscr{C}$ 在第三个已知点的切线，(b) $\mathscr{C}$ 的另一点，(c) 在 (b) 中所确定的点处的切线.

10.15 叙述并作出习题 10.12 的对偶.

10.16 叙述并作出习题 10.13 的对偶.

10.17 叙述并作出习题 10.14 的对偶.

10.18 证明：若一个三角形内接于一条二次曲线，则由顶点处的切线组成的三角形与原三角形成透视对应.

10.19 叙述并证明习题 10.18 的对偶.

10.20 证明：若两个三角形是透视的，则它们非对应边的交点在一条二次曲线上.
提示：在图 10-4 中，设已知三角形的边为 A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 和 A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1, p 为透视轴.

10.21　证明：若一个简单四点形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于一条二次曲线，则在 A_1 点的切线和边 A_3A_4，在 A_4 处的切线和边 A_1A_2，以及 A_2A_3 和 A_1A_4 的交点共线.

10.22　叙述并证明习题 10.21 的对偶.

10.23　证明：若一个简单四点形内接于一条二次曲线，则在两组对顶点处切线的交点，和两组对边的交点是个共线点.

10.24　叙述并证明习题 10.23 的对偶.

10.25　证明：若一个完全四点形的顶点在一条二次曲线上，则二次曲线在一对顶点处的切线与不在这对顶点的连线上的四点形的对角点共线.

10.26　叙述并证明习题 10.25 的对偶.

10.27　若一个简单六边形 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 外切于一条二次曲线，证明点 $a_1\cdot a_3$, $a_3\cdot a_5$, $a_5\cdot a_1$, $a_2\cdot a_4$, $a_4\cdot a_6$, $a_6\cdot a_2$ 在一条二次曲线上.

10.28　证明：若一个三角形内接于一条二次曲线，则在任一顶点上的两边被在该顶点处的切线和这个顶点与其它两个顶点处切线交点的连线调和分割.

10.29　叙述并证明 10.28 的对偶.

10.30　完成习题 10.8 的证明.

10.31　给定一条二次曲线的四条切线 p, q, r, s 和 p 上的切点 P，作出其它切线上的切点.

10.32　两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 通过 P 和 p 成透视对应．若 $p\cdot PA=A''$, $p\cdot PB=B''$, $p\cdot PC=C''$ 且 $H(A, A', P, A'')$，证明：

(a) $H(B, B', P, B'')$, $H(C, C', P, C'')$；

(b) 两个三角形的顶点在一条二次曲线上.

10.33　证明：一个内接于二次曲线的简单四点形和它关于此曲线的相伴简单四线形有下列性质：(i)两者的对角线组成一个调和集；(ii)两者的两组对边的交点组成一个调和集；(iii)四线形的对角线通过四点形两对对边的交点.

10.34　利用巴斯卡定理，证明图 4-7 中下列每组点在一条二次曲线上.

(a) P, S, D, E, F, G.　(b) Q, R, D, E, F, G.　(c) P, R, F, G, I, J.

(d) S, Q, F, G, I, J.　(e) P, Q, C, G, J, L.　(f) R, S, C, F, J, N.

第十一章　笛沙格对合定理

§11.1　基本内容

1. 引　　言

在第六章,我们用顶点不在已知直线上的完全四点形建立了此直线上的对合,即

(a) 若四点形的对边点不在此直线上,则对合是椭圆型的.

(b) 若四点形只有一个对边点 A 在此直线上,则对合是抛物型的(以 A 为二重点).

(c) 若四点形有两个对边点 A 和 B 在此直线上,则对合是双曲型的(以 A, B 为二重点).

若一直线不在完全四点形 $PQRS$ 的顶点上,则这四点形确定的此直线上的对合的三对互逆点,可以认为是由这个四点形的顶点确定的三条退化二次曲线 PQ, RS; PR, QS; PS, QR 所确定(见图 6-4). 笛沙格在 1639 年证明,只要直线和一条在顶点 P, Q, R, S 上的非退化二次曲线相交,则其交点都是对合中的一对互逆点. 这一章中,我们考虑由一条或几条二次曲线建立起来的在一直线或一点上的对合.

2. 二次曲线确定的对合

考虑二次曲线 $\mathscr{C}$ 和直线 k(k 不是 $\mathscr{C}$ 的切线),在 k 上任取一点 X,作出它关于 $\mathscr{C}$ 的极线 x,并令 $x\cdot k=X'$. 按定义,X 和 X' 关于 $\mathscr{C}$ 共轭. 而且,如果先取 X',我们同样可得到 X. 于是 X 和 X' 之间的对应是一个对合. 我们有

定理 11.1　一条给定的二次曲线在平面上每一条非切线的直线上确定一个对合,这个对合的互逆对由关于二次曲线的共轭点组成.

当直线与二次曲线相交时,每一交点都在它自己的极线上,因此,这些点都是共轭点的对合中的二重点(也可参看习题 9.29),所以此对合是双曲型的. 若直线不与二次曲线相交,共轭点的对合是椭圆型的.

对偶地,我们有

定理 11.1′　一条给定的二次曲线确定不在其上的每一点的一个线对合,这个对合的互逆对是关于此二次曲线的共轭线.

若已知点是二次曲线内部的一点,则对合是椭圆型的. 若已知点是二次曲线外部的一点. 则此对合是双曲型的. 它以在这点上的二切线为二重线.

3. 笛 沙 格 定 理

考虑图 11.1(a) 中的简单四点形 $PQRS$ 和任一条不在四点形顶点上的直线 k,由定理 6.3 和 6.2 知,四点形的两对对边在这条直线上确定的对合,在此对合中,k 与四点形对边的

交点是互逆对. 在习题 11.1 中,我们将证明

定理 11.2(笛沙格定理) 若一简单四点形内接于二次曲线 $\mathscr{C}$,直线 k 不在四点形顶点上且与 $\mathscr{C}$ 交于两点,则这两点是四点形的两双对边在 k 上确定的对合中的互逆对.

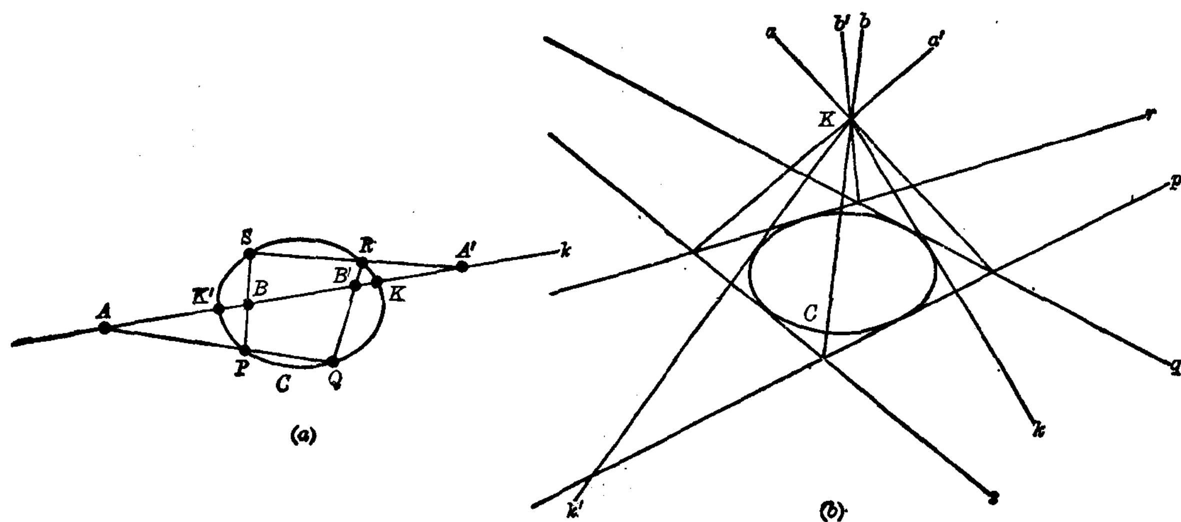


图 11-1

这个定理提供了由其上任意五个点确定的二次曲线的又一种作法: 事实上, 设 P, Q, R, S, K 为已知点, k 是 K 上任意一直线, 但 k 不在其它已知点上, 则简单四点形 $PQRS$ 的对边和 k 交于两对点,它们决定一个对合. 如习题 6.2 中所作的那样, 在这个对合中, K 的对应点 K' 是二次曲线的另一点.

对偶地,我们有(见图 11-1(b)):

定理 11.2′ 若一简单四线形外切于二次曲线 $\mathscr{C}$, 点 K 不在四线形的边上, 从 K 能作 $\mathscr{C}$ 的两条切线,则这些切线是四线形的两双对顶点在 K 上确定的对合中的互逆对.

4. 笛沙格定理的特殊情况

不论是把一个已知三角形及其一顶点上的切线看成是内接于二次曲线的简单四点形的退化情形,还是通过独立的证明,我们都有(见图 11-2):

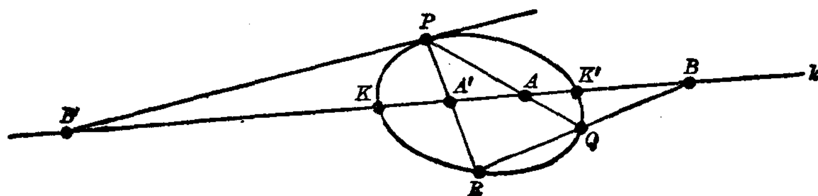


图 11-2

定理 11.3 若一个三角形内接于二次曲线 $\mathscr{C}$,且直线 k 不在其顶点上,它与 $\mathscr{C}$ 交于两点, 则这些点是在 k 上的一个对合中的互逆对. 这个对合, 是由 k 和三角形两边的一对交点,k 和第三边及第三边相对顶点上的切线的交点所组成的点对所确定的.

它的对偶是:

定理 11.3′ 若一个三角形外切于二次曲线 $\mathscr{C}$, 且点 K 不在其边上, 从它能作 $\mathscr{C}$ 的两条切线,则这些切线是 K 上的一个对合中的互逆的,这个对合, 是由 K 和三角形的两个

顶点的一对连线，K 和第三个顶点及第三个顶点的对边上的切点的连线所组成的直线对所确定的(此定理的一个独立的证明见习题 11.2).

定理 11.3 提供了由任意四点确定的二次曲线，在其中任一点上的切线的又一种作法. 事实上,假定 K, K', P, Q, R 为已知点,要作 P 点的切线,令 $KK'\cdot PQ=A$, $KK'\cdot PR=A'$. $KK'\cdot RQ=B$. 在由 K, K' 和 A, A' 所确定的对合中作 B 的对应点 B', 则 PB' 即为所求的切线.

最后，把二次曲线的两条切线和切点的连线(计算两次)看作是一个内接四点形的退化情形,我们有(见图 11-3(a))：

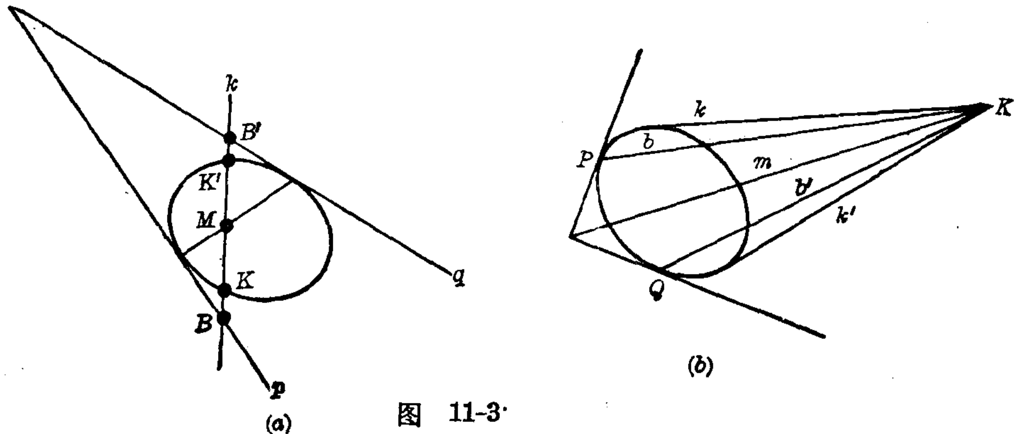


图 11-3

定理 11.4 若直线 k 交二次曲线于 K 和 K',交二次曲线的两条切线于 B 和 B', 交两切线的切点的连线于 M, 则 M 是 k 上的互逆对 K, K' 和 B, B' 所确定的对合中的二重点.

它的对偶是(见图 11-3(b))：

定理 11.4′ 若从点 K 作二次曲线的两条切线 k 和 k', K 和二次曲线上的两点 P, Q 的连线是 b, b', K 和在 P, Q 处切线交点的连线是 m. 则 m 是 K 上互逆对 k, k' 和 b, b' 所确定的对合中的二重线.

5. 四点形上的二次曲线束

五个不同点(其中没有三点共线)确定唯一一条二次曲线(这里所说的二次曲线总是指非退化的二次曲线)，当一个完全四点形给定时，在这个四点形的顶点上的二次曲线就由选择一个不在其边上的附加点所确定. 所有这样的二次曲线的全体称为**四点形上的二次曲线束**. 根据定理 11.2 有

定理 11.5 一个给定四点形上的二次曲线束中的二次曲线和一条不在这四点形的顶点上的直线 k 相交,则其交点对都是 k 上由这个四点形所确定的对合中的互逆对.

从图 11-1(a)易知,若 K, K' 是 k 上不同于点对 A, A'; B, B'; C, C' 的互逆对, 则 K 和 K' 在四点形上的二次曲线束中的一条曲线上.反之,若 K,K' 不是 A, A'; B, B'; C, C' 中之一时,则 P, Q, R, S, K, K' 确定一对直线,即一条退化的二次曲线. 这样,定理 11.5 的逆为:

定理 11.6 k 上由四点形 $PQRS$ 所确定的对合中的任何互逆对,在通过这个四点形的一条二次曲线上.

只要退化的二次曲线 PQ, RS, PS, QR, PR, QS 包含在四点形上的二次曲线束中，则上述定理成立.

若定理 11.5 中的对合有一个二重点，则这个点为四点形上的二次曲线束中某一曲线与 k 相切的切点. 因为一个对合或没有二重点，或者有两个不同的二重点. 我们有

定理 11.7 若 P, Q, R, S 是不同的点(其中没有三点共线)；k 是不在这些点上的任一直线，那么在 P, Q, R, S 四点上，或者存在两条二次曲线，或者没有二次曲线切于直线 k.

6. 九点二次曲线

设 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 是由四点形 $PQRS$ 所确定的二次曲线束中的两条不同的二次曲线，o 是不在四点形及其对角三角形 ABC 的顶点上的任一直线，o 关于 $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ 的极点分别记为 O_1, O_2. 当 Z 在 o 上变动时(见图 11-4)、它关于 $\mathscr{C}_1$ 的极线绕 O_1 旋转，关于 $\mathscr{C}_2$ 的极线绕 O_2 旋转. 根据定理 9.10, 线束 $O_1(Z_1)$, 和 $O_2(Z_2)$ 都与点列 $o(Z)$ 射影相关，所以 $O_1(Z_1)\barwedge O_2(Z_2)$, 且当 Z 在 o 上变动时，$Z'=z_1\cdot z_2$ 描出一条在 O_1, O_2 上的二次曲线 $\mathscr{C}$. 现在我们证明这条二次曲线与曲线 $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ 的选择无关，而由它上面的九个完全确定的点所确定.

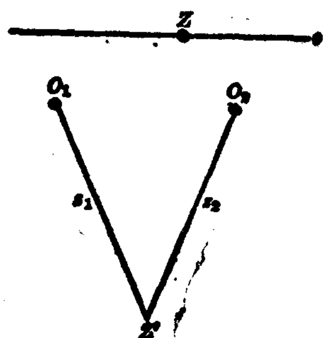


图 11-4

首先，设 $AB\cdot o=C'$. 关于二次曲线束中的任何二次曲线，AB 的极点是 C. 当 $Z=C'$ 时，则 $z_1=O_1C$, $z_2=O_2C$, 且 $Z'=C$ 在 $\mathscr{C}$ 上. 同理，A 和 B 在 $\mathscr{C}$ 上，即 $\mathscr{C}$ 在对角三角形的顶点上. 现在，设 $PQ\cdot o=T$. 当 $Z=T$ 时，根据定理 9.1, $z_1=O_1U$, $z_2=O_2U$, 其中 $H(P, Q, T, U)$. 现在在 $\mathscr{C}$ 上有六个附加点，即 o 和四点形的各边的交点关于四点形在该边上的每对顶点的调和共轭点. 二次曲线 $\mathscr{C}$ 称为四点形关于直线 o 的九点二次曲线.

§11.2 问题及其解

11.1 证明：若一个简单四点形内接于二次曲线 $\mathscr{C}$, 且不在其顶点上的直线 k 交 $\mathscr{C}$ 于两点，则这两点是四边形的两组对边在 k 上确定的对合中的互逆对.

证明：考虑图 11-1(*a*) 中内接于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的简单四点形 $PQRS$. 直线 k 交 $\mathscr{C}$ 于 K, K', 交四点形的对边于 A, A' 和 B, B', 把 $\mathscr{C}$ 看成是由射影

$$(PK,\ PK',\ PQ,\ PS)\barwedge(RK,\ RK',\ RQ,\ RS)$$

生成的，则由定理 2.10 有

$$(K,\ K',\ A,\ B)\stackrel{P}{\barwedge}(PK,\ PK',\ PQ,\ PS)\barwedge(RK,\ RK',\ RQ,\ RS)$$
$$\stackrel{R}{\barwedge}(K,\ K',\ B',\ A')$$

和
$$(K,\ K',\ A,\ B)\barwedge(K,\ K',\ B',\ A')\barwedge(K',\ K,\ A',\ B').$$

由 $(K, K', A, B)\barwedge(K', K, A', B')$ 可得 K, K'; A, A'; B, B' 是 k 上一个对合中的三对互逆对. 因为这个对合是由 A, A'; B, B' 确定的，于是定理得证.

11.2 证明：若一个三角形外切于一条二次曲线 $\mathscr{C}$, 且从不在其边上的点 K 可作 $\mathscr{C}$ 的两条切线，则这些切线是 K 上的对合中的互逆对. 这个对合是由 K 和三角形的两个顶

点的一对连线、以及 K 和第三个顶点的连线及第三个顶点对边上切点的连线所组成的直线对所确定的.

证明：参看图 11-5. pqr 是外切三角形，k, k' 是从 K 所作 $\mathscr{C}$ 的切线，把 $\mathscr{C}$ 看成是由 p 和 r 上的两个点束之间的射影生成的. 回想把 $p\cdot r$ 看成是 p 上的点束中的一点时，$p\cdot r$ 的对应点是 r 的切点 R，我们有

$$(p\cdot k,\ p\cdot k',\ p\cdot q,\ p\cdot r)\barwedge(r\cdot k,\ r\cdot k',\ r\cdot q,\ R).$$

于是 $(k, k', a, b)\barwedge(k, k', b', a')\barwedge(k', k, a', b')$，命题成立.

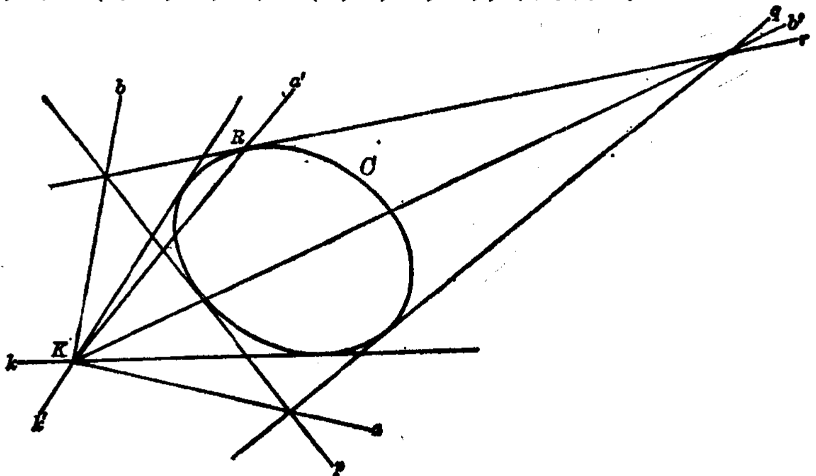


图 11-5

§11.3 补 充 题

11.3 证明：内接于已知二次曲线的简单四点形在 $\mathscr{C}$ 的任一不过其顶点的切线上确定一个对合，此对合以切点为其二重点.

11.4 叙述并证明习题 11.3 的对偶.

11.5 考虑定理 11.3 中的直线 k 与二次曲线相切时的情况.

11.6 已知五个不同点(其中任何三个都不共线) 作出 (a) 由此五点确定的二次曲线上另一点，(b)在其中任一点处 $\mathscr{C}$ 的切线.

11.7 作出习题 11.6 的对偶.

11.8 已知无三点共线的四个点及过某一已知点的直线，求作一条在已知四点上且与已知直线相切于另一点的二次曲线.

11.9 作出习题 11.8 的对偶.

11.10 证明，若三角形 PQR 内接于二次曲线 $\mathscr{C}$，则三角形的任何两边被 $\mathscr{C}$ 在公共顶点处的切线和这个顶点与 $\mathscr{C}$ 在其它两个顶点处切线交点的连线调和分隔.

11.11 叙述并证明习题 11.10 中的对偶.

11.12 已知四个不同点，其中任何三点都不共线，和在其中一点上的一条直线，作出在已知点上且与已知直线相切的二次曲线.

提示：考虑图 11-2，其中 P, K, Q, R 和 P 处的切线为已知.

11.13 叙述并证明习题 11.12 的对偶.

11.14 证明定理 11.4.

11.15 已知二次曲线的两条切线，它们的切点和曲线上的另一点，作出此曲线。
提示：考虑在后面那点的任一直线上的对合.

11.16 叙述并证明习题 11.15 的对偶.

11.17 假定四点形未扩大到包括退化曲线，证明定理 11.6.

11.18 已知一个三角形 ABC，一条不在其顶点上的直线 x 和在 x 上但不在三角形边上的一点 X，作出在 X 处与 x 相切且以 ABC 为其自配极三角形的二次曲线.

11.19 设 $\mathscr{C}$ 是已知四点线束中关于一条已知直线 o 的九点二次曲线，证明：若 o 切于束中两条二次曲线（见定理 11.7），则切点在 $\mathscr{C}$ 上.

第十二章　二次曲线上的点列和线束

§12.1　基 本 内 容

1. 定　　义

考虑点列 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$和不在 x 上的点 O，从 O 用 $OA_1=a$, $OB_1=b$, $OC_1=c$, $\cdots$ 投影 x 上各点，且用 O 上任一二次曲线截线束 $O(a, b, c, \cdots)$. 由 $O(a, b, c, \cdots)$在 $\mathscr{C}$ 上这样确定的点集 $A, B, C, \cdots$ 叫做二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的点列，记为 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$. 如前所述，$x$ 上的点列和 O 上的线束之间的对应叫做基本透视. 同样，点列 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$和从 $\mathscr{C}$ 上的任意点 O 投影这些点所得的线束之间的对应也叫做基本透视. 并记为 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\barwedge O(a, b, c, \cdots)$, 而 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$与点列 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$ 之间的对应就叫做透视，并记为：

i) $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\overset{\bullet}{\barwedge} x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$. 这样，若存在二次曲线上一点 O, 它不在直线 x 上，满足 AA_1, BB_1, CC_1 都在 O 上. 则二次曲线上的点列 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$与直线 x 上之点列 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$便都是透视. 由图 12-1(a)容易知道，和两条不同直线上的两点列之间的透视的情形一样，若已知两对对应点，则透视 i)完全确定. 另一方面，若 x 和 $\mathscr{C}$ 没有公共点(图 12-1(a))或 x 与 $\mathscr{C}$ 相切，或 x 与 $\mathscr{C}$ 有两个不同的公共点时，透视 i) 便分别有 0, 1, 2 个自对应点.

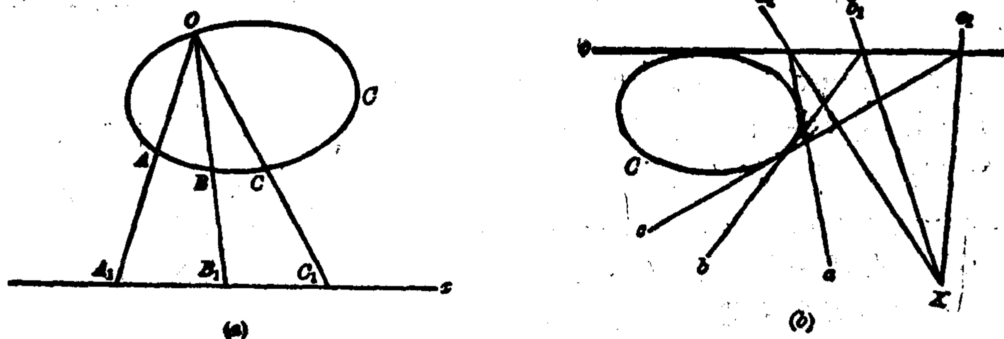


图　12-1

对偶地(见图 12-1, (b))，二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的所有直线 $a, b, c, \cdots$ 的集合叫做 $\mathscr{C}$ 上的线束，记为 $\mathscr{C}(a, b, c, \cdots)$. 若存在 $\mathscr{C}$ 上的直线 o, 它不在 X 上，满足 $a\cdot a_1$, $b\cdot b_1$, $c\cdot c_1$, $\cdots$ 都在 o 上，则线束 $\mathscr{C}(a, b, c, \cdots)$和线束 $X(a_1, b_1, c_1, \cdots)$称为是透视的.

下面我们考虑不同直线 x 和 x' 上的两个点列 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$和 $x'(A_2, B_2, C_2, \cdots)$, 它们射影相关，但不是透视相关. 从曲线 $\mathscr{C}$ 上的任一不在 x' 上的点 O' 投影 x' 上各点，得到点列 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$. 现在

$$\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\overset{O'}{\barwedge} x'(A_2, B_2, C_2, \cdots)\barwedge x(A_1, B_1, C_1, \cdots).$$

我们定义：只要存在一点列 $x'(A_2, B_2, C_2, \cdots)$ 满足

$$x(A_1, B_1, C_1, \cdots)\barwedge x'(A_2, B_2, C_2, \cdots)$$

且

$$\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\overset{O'}{\barwedge} x'(A_2, B_2, C_2, \cdots),$$

(O' 在 $\mathscr{C}$ 上但不在 x' 上)，则点列 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$ 及 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$ 是射影的，$\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\barwedge x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$.

当三对对应点为已知时，射影 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\barwedge x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$ 便完全确定了.

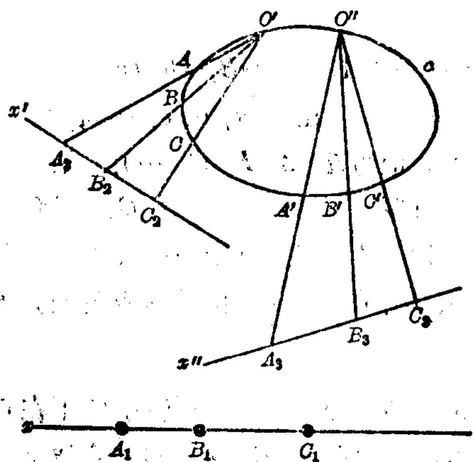


图 12-2

下面考虑两个点列 $x'(A_2, B_2, C_2, \cdots)$ 和 $x''(A_3, B_3, C_3, \cdots)$ (见图 12-2)，它们都与点列 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$ 射影相关，但不透视相关. 如前段所述立刻得到：

ii) $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\overset{O'}{\barwedge} x'(A_2, B_2, C_2, \cdots)\barwedge x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$;

iii) $\mathscr{C}(A', B', C', \cdots)\overset{O''}{\barwedge} x''(A_3, B_3, C_3, \cdots)\barwedge x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$.

这时 O', O'' 在 $\mathscr{C}$ 上，但 O' 不在 x' 上，O'' 不在 x'' 上. 结合 ii) 及 iii)，我们有：

$$\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\overset{O'}{\barwedge} x'(\cdots)\barwedge x(\cdots)\barwedge x''(\cdots)\overset{O''}{\barwedge}\mathscr{C}(A', B', C', \cdots),$$

并且定义：只要存在点列 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$，它和同一二次曲线上的两个二次点列 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$ 及 $\mathscr{C}(A', B', C', \cdots)$ 都是射影的，则 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$ 及 $\mathscr{C}(A', B', C', \cdots)$ 是射影的.

首先，考虑图 12-3 中两个射影相关的迭置点列 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)$ 和 $x(A_1', B_1', C_1', \cdots)$. 把每个点列中的点与任一不在 x 上的点 O 连起来得到线束 $O(a, b, c, \cdots)$ 和 $O(a', b', c', \cdots)$. 显然，$O(a, b, c, \cdots)\barwedge O(a', b', c', \cdots)$. 若现在这两个线束被过 O 点的任一二次曲线 $\mathscr{C}$ 所截，分别得到两个点列 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)$ 和 $\mathscr{C}(A', B', C', \cdots)$. 则这两个点列是射影相关的. 即 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\barwedge\mathscr{C}(A', B', C', \cdots)$. 事实上

$$\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\overline{\barwedge} O(a, b, c, \cdots)$$
$$\barwedge O(a', b', c', \cdots)\overline{\barwedge}\mathscr{C}(A', B', C', \cdots)$$

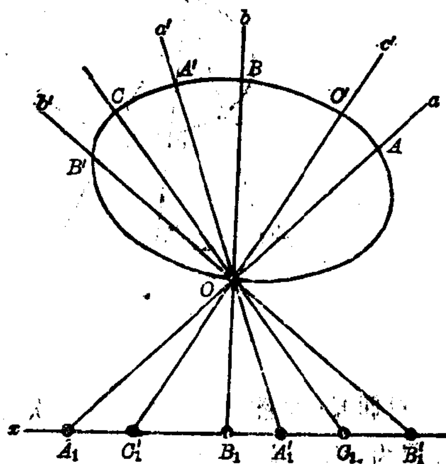


图 12-3

为了对偶，我们考虑射影相关的两迭置线束 $X(a_1, b_1, c_1, \cdots)$ 和 $X(a_1', b_1', c_1', \cdots)$，两线束被任一不在 X 上的直线 o 所截，得到

$$o(A_1, B_1, C_1, \cdots)\barwedge o(A_1', B_1', C_1', \cdots).$$

设 $\mathscr{C}$ 是任意一条与 o 相切的二次曲线，从 $A_1, B_1, C_1, \cdots; A_1', B_1', C_1', \cdots$ 中每一点分别作 $\mathscr{C}$ 的第二条切线 $a, b, c, \cdots; a', b', c', \cdots$. 则

$$\mathscr{C}(a, b, c, \cdots) \barwedge o(A_1, B_1, C_1, \cdots) \wedge o(A_1', B_1', C_1', \cdots)$$
$$\barwedge \mathscr{C}(a', b', c', \cdots)$$

且 $$\mathscr{C}(a, b, c, \cdots) \wedge \mathscr{C}(a', b', c', \cdots).$$

2. 一条二次曲线上的两个射影点列

设 $\mathscr{C}(A, B, C, D, \cdots)$ 及 $\mathscr{C}(A', B', C', D', \cdots)$ 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的两个射影点列. 当从 $\mathscr{C}$ 上两点 O 及 O' 分别投影这两个点列时，我们得出，

$$(OA, OB, OC, OD, \cdots) \barwedge \mathscr{C}(A, B, C, D, \cdots) \wedge \mathscr{C}(A', B', C', D', \cdots)$$
$$\barwedge (O'A', O'B', O'C', O'D', \cdots),$$

所以 $$(OA, OB, OC, OD, \cdots) \wedge (O'A', O'B', O'C', O'D', \cdots).$$

特别地，当 $O=A'$, $O'=A$ 时，便有透视

$$(A'A, A'B, A'C, A'D, \cdots) \barwedge (AA', AB', AC', AD', \cdots).$$

因此，$A'B \cdot AB'$, $A'C \cdot AC'$, $A'D \cdot AD'$, $\cdots$ 都在一直线 p 上，则 p 是内接六边形 $AB'CA'BC'$ 的巴斯卡线，所以 $B'C \cdot BC'$ 也在 p 上. 通过考察内接六边形 $AB'DA'BD'$ 和 $AC'DA'CD'$, 我们推得只要 $AX' \cdot A'X$ 在 p 上，则 $\mathscr{C}$ 上的点 X 和 X' 是两个给定点列中的对应点. 此外，通过考察内接六边形 $BC'DB'CD'$, 我们得出：若开始采用除 A, A' 以外的任一对对应点时，则也能得到直线 p. 直线 p 称为二次曲线上的射影轴. 这样我们就证明了：

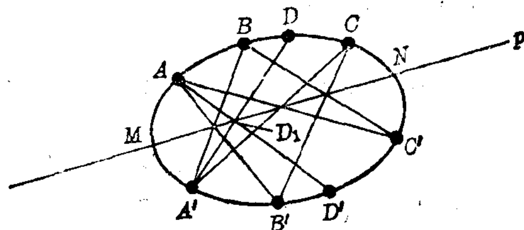


图 12-4

定理 12.1 若 $\mathscr{C}(A, B, C, D, \cdots)$ 和 $\mathscr{C}(A', B', C', D', \cdots)$ 是二次曲线上的两个射影点列，则存在一条直线 p (是射影轴) 满足：如果 $X, X'; Y, Y'$ 是两对对应点，则 $XY' \cdot X'Y$ 在 p 上.

对偶地，我们有：

定理 12.1' 若 $\mathscr{C}(a, b, c, d, \cdots)$ 和 $\mathscr{C}'(a', b', c', d', \cdots)$ 是二次曲线上的两个射影线束，则存在一个点 P (是射影中心) 满足：如果 $x, x'; y, y'$ 是两对对应直线，则 $(x \cdot y')(x' \cdot y)$ 在 P 上.

在定理 12.1 和 12.1' 中，若假定二次曲线是同一条曲线，而直线 $a, b, c, \cdots; a', b', c', \cdots$ 是二次曲线分别在点 $A, B, C, \cdots; A', B', C', \cdots$ 的切线，则射影线束

$$\mathscr{C}(a, b, c, \cdots) \wedge \mathscr{C}(a', b', c', \cdots)$$

的中心 P 是射影点列 $\mathscr{C}(A, B, C, \cdots) \wedge \mathscr{C}(A', B', C', \cdots)$ 的射影轴 p 的极点.

若二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的射影有两个，一个或没有二重元素，则此射影分别叫做双曲型、抛物型或椭圆型的. 我们留给读者证明：(a) 二次曲线 $\mathscr{C}$ 上两个点列间的射影是双曲型、抛物型或椭圆型的，依照射影轴 p 与 $\mathscr{C}$ 相交于不同点，p 与 $\mathscr{C}$ 相切，或 p 与 $\mathscr{C}$ 不相交而定；(b) $\mathscr{C}$ 上两个线束之间的射影是双曲型、抛物型或椭圆型的，依照射影中心 P 在 $\mathscr{C}$ 的外部，$\mathscr{C}$ 上或 $\mathscr{C}$ 的内部而定.

根据射影 $\mathscr{C}(A, B, C, D, \cdots)\barwedge x(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)$ 的定义可推出

$$\mathscr{C}(A, B, C, D, \cdots)\overset{O'}{\barwedge} x'(A_2, B_2, C_2, D_2, \cdots)\barwedge x(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots),$$

其中 O' 在 $\mathscr{C}$ 上但不在 x' 上，根据定理 2.10，总存在一个射影

$$x(A_1, B_1, C_1, D_1)\barwedge x(B_1, A_1, D_1, C_1).$$

由此易得

定理 12.2　对于二次曲线 $\mathscr{C}$ 上四个不同的点 A, B, C, D 有 $\mathscr{C}(A, B, C, D)\barwedge\mathscr{C}(B, A, D, C)$.

3. 斯坦因纳作图法

定理 12.1 提供了一个作迭置射影 $x(A_1, B_1, C_1, \cdots)\barwedge x(A_1', B_1', C_1', \cdots)$ 的二重点(如果有的话)的方法．这个方法由斯坦因纳首先给出．在图 12-5 中，O 是任一不在 x 上的点，$\mathscr{C}$ 是 O 上任一二次曲线，从点 O 把点 $A_1, B_1, C_1; A_1', B_1', C_1'$ 分别投影到 $\mathscr{C}$ 上的点 $A, B, C; A', B', C'$，作出内接六边形 $AB'CA'BC'$ 的巴斯卡直线，并记它与 $\mathscr{C}$ 的交点为 M, N，则 $M_1=OM\cdot x$, $N_1=ON\cdot x$ 就是所求的二重点．为证明这点，考虑

$$x(A_1, B_1, C_1, M_1, N_1)\overset{O}{\barwedge}\mathscr{C}(A, B, C, M, N)\overset{B'}{\barwedge} p(T, U, V, M, N)$$
$$\overset{B}{\barwedge}\mathscr{C}(A', B', C', M, N)\overset{O}{\barwedge} x(A_1', B_1', C_1', M_1, N_1),$$

这表明 M_1, N_1 为 x 上所给迭置射影的二重点．

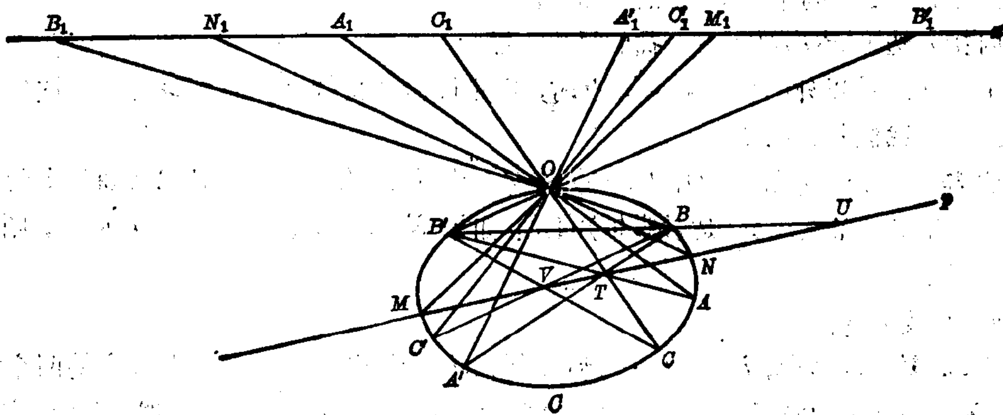


图　12-5

上述作法适用于具有两个二重点的迭置射影．对于任意给定的射影，直到 p 画出之前，并不知道二重点的个数．读者若想得到具有一个或没有二重点的射影的例子，最好从一条直线 x，不在 x 上的一点 O 以及 O 上的一条二次曲线 $\mathscr{C}$ 着手，对于一个二重点的情形，取 $\mathscr{C}$ 的任一切线为 p(切点不是 O)．对于没有二重点的情形，取不是 x 的任一直线为 p，它与 $\mathscr{C}$ 没有公共点．

现在我们讨论下列问题：作具有指定二重点的射影，选择二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的点 $A, B, C; A', B', C'$ 使得 $AB'CA'BC'$ 的巴斯卡线是 p 且从 O 把这些点投影到 x 上，从而确定射影：

$$x(A_1, B_1, C_1, \cdots)\barwedge x(A_1', B_1', C_1', \cdots).$$

一条直线上对合的二重点(如果有的话)的作法与上述作法十分类似．设 $A_1, A_1'; B_1,$

B_1'为直线x上给定对合的两对互逆点，它们从二次曲线上任一点O在此二次曲线上的射影分别是A, A'; B, B'，由于$x(A_1, A_1', B_1, B_1')\overline{\wedge}x(A_1', A_1, B_1', B_1)$，所以有$\mathscr{C}(A, A', B, B')\overline{\wedge}\mathscr{C}(A', A, B', B)$，我们只须作出由点$AB'\cdot BA'$和$AB\cdot A'B'$确定的对合轴$p$即可.

注意：斯坦因纳作图法在于将一直线上的给定射影变换为二次曲线上的射影，以便当涉及二次曲线上的射影时，利用某些作图的简便性. 这就必然导致我们深入研究下面的问题：当已知一条固定的二次曲线时再加上一根直尺可能作出什么样的图形.

4. 二次曲线上的对合

具有一对互逆对应元素的二次曲线上两个点列(线束)之间的射影叫做二次曲线上的一个对合. 在习题12.1中，我们将证明：

定理 12.3 在二次曲线的对合中，每一对对应元素都是互逆对.

考虑二次曲线$\mathscr{C}$上点的对合中的两对互逆点组A, A'; B, B'(见图12-6). 由$(A, A', B)\overline{\wedge}(A', A, B')$可知，射影轴(也称对合轴)$p$也在点$AB'\cdot A'B$和$AB\cdot A'B'$上. 注意$p$是内接于$\mathscr{C}$的完全四点形$AA'BB'$的对角三角形的一边. 第三个对边点$AA'\cdot BB'$记为$P$，并令$A_1=AA'\cdot p$, $B_1=BB'\cdot p$，则$H(A, A'; A_1, P)$和$H(B, B'; B_1, P)$.

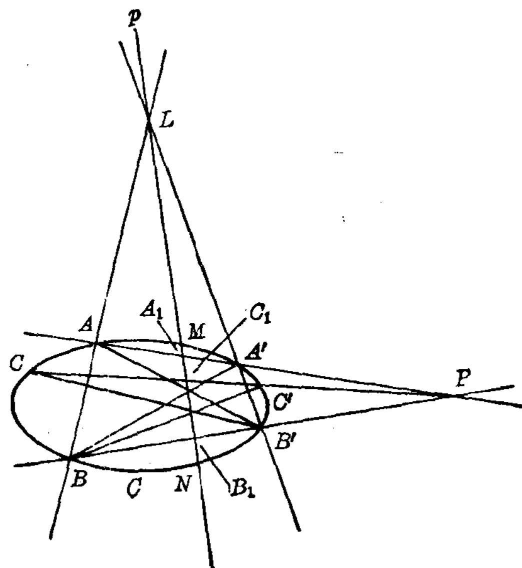


图 12-6

在$\mathscr{C}$上另取一点C，若C'是对合中C的对应点，则$CB'\cdot C'B$在p上. 这样C'容易求得(把它同确定直线上的对合中的对应点的步骤相比较)，由于$(B, B', C)\overline{\wedge}(B', B, C')$，故$p$也在$BC\cdot B'C'$上. 假设$BB'\cdot CC'=P'$，且令$CC'\cdot p=C_1$，现在$H(C, C'; C_1, P')$及$H(B, B'; B_1, P')$. 但$H(B, B'; B_1, P)$；因此$P'=P$, $H(C, C'; C_1, P)$且AA', BB', CC'都在P上，于是我们便证明了：

定理 12.4 在二次曲线上点之间的任一对合中，互逆点对的连线共点.

定理12.4中互逆点对连线的公共点P叫做对合中心. 注意它是对合轴的极点.

二次曲线$\mathscr{C}$上的对合是$\mathscr{C}$上之射影的特殊情形，它依照有两个、一个或没有二重元素而分别称为双曲型、抛物型和椭圆型的.

图12-6表示$\mathscr{C}$上双曲型对合的情形. 这里，对合轴p与$\mathscr{C}$相交于两个不同点M和N，它们是对合的二重点，而对合中心P在$\mathscr{C}$的外部.

在抛物型对合中，对合轴是$\mathscr{C}$的切线；因此，对合中心P在此轴上，特别地，在此二次曲线上. 因此P在对合的每一互逆对中. 二次曲线上的抛物型对合并不甚重要，这里不再考虑它了.

在二次曲线的椭圆型对合中，对合轴不与二次曲线相交，因此对合中心在曲线内部.

在习题 12.2 中，我们将证明：

定理 12.5 若在直线 x 上由二次曲线 $\mathscr{C}$ 确定的共轭点的对合被 $\mathscr{C}$ 上任一点投影到 $\mathscr{C}$ 上，则所得的 $\mathscr{C}$ 上的对合以 x 作为它的对合轴。

5. 二次曲线上的调和集

在任一点 O 上取四条直线 a, b, c, d，使得 $H(a, b; c, d)$。设这些直线被 O 上的任一二次曲线 $\mathscr{C}$ 所截，分别得到点 A, B, C, D，现在从 $\mathscr{C}$ 上另外一点 O' 分别用直线 $a', b', c',$ d' 向这些点作投影，由二次曲线的定义，$O(a, b, c, d)\barwedge O'(a', b', c', d')$，因此 $H(a', b';$ $c', d')$。

我们定义：若二次曲线上四个不同的点是从曲线上任一点将一直线的调和集投影而得到的，则称这四点构成一调和集(或称是调和的)。

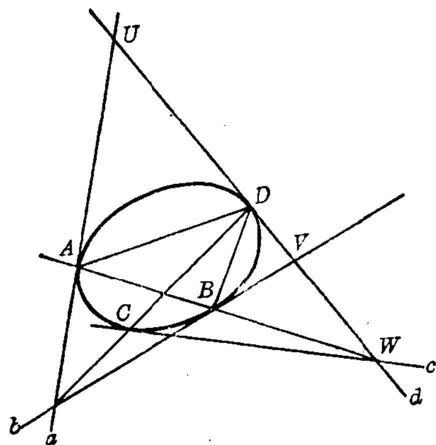


图 12-7

对偶地，若二次曲线上四条不同直线被曲线上任一直线截得一调和点集，则称这四条直线构成一调和集(或称是调和的)。

注意图 12-7，当从 $\mathscr{C}$ 上 A, B, C, D 中某一点，比如说 D，向它们投影时，射影是 DA, DB, DC，和 $\mathscr{C}$ 在 D 的切线。对偶地，若从 $\mathscr{C}$ 上 a, b, c, d 中某一直线，比如说 d，与它们相截，则交点是 $d\cdot a, d\cdot b, d\cdot c$ 及 d 的切点。

由此，从定理 9.7 推出：

定理 12.6 若二次曲线 $\mathscr{C}$ 上四个点是调和的，则 $\mathscr{C}$ 在这些点处的切线也是调和的(证明见习题 12.3)。

定理 12.6 之对偶(也是它的逆定理)为：

定理 12.6′ 若二次曲线的四条直线是调和的，则它们的切点也是调和的。

在习题 12.4 中，我们将证明：

定理 12.7 若 A, B, C, D 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的四个调和点，即 $H(A, B; C, D)$，则直线 AB 和 CD 关于 $\mathscr{C}$ 共轭。

其逆也成立。

定理 12.8 若关于二次曲线的两条共轭直线与它分别有公共点 A, B 和 C, D，则 $H(A, B; C, D)$。

在习题 12.5 中，我们将证明定理 12.8 的对偶：

定理 12.8′ 若关于二次曲线的两个共轭点与它分别有公共直线 a, b 和 c, d，则 $H(a, b, c, d)$。

作为定理 12.8 的推论，我们有：

定理 12.9 在二次曲线的双曲型对合中，二重元素与每一对互逆点构成调和集。

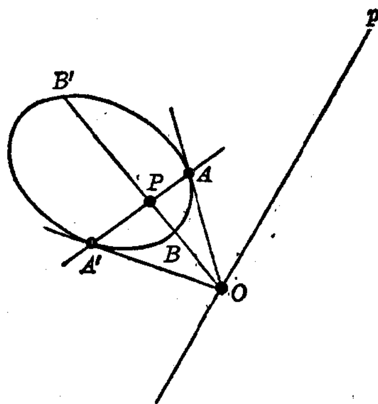


图 12-8

最后，利用图 12-8 可知，对于二次曲线的椭圆型对合的已知互逆点对 A, A'，仅在对合中心 P 和 AA' 的极点 O 上的直线 PO 与 AA' 是共轭的。因而有

定理 12.10 在二次曲线的椭圆型对合中，有且只有一对互逆点，它们与已知的互逆点对构成调和集.

§12.2 问题及其解

12.1 证明：在二次曲线上的一个对合中，每一对对应元素都是互逆对应.

证明：考虑在二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的两个点列之间的射影，其中(1) A 和 B 是互逆对；(2)第一列中的 C 不等于 A, B. 在第二列中的对应元素是 D；(3)第一列中的 D 在第二列中的对应元素是 E，则：

$$\mathscr{C}(A, B, C, D)\barwedge\mathscr{C}(B, A, D, E).$$

根据定理 12.2 $\qquad \mathscr{C}(A, B, C, D)\barwedge\mathscr{C}(B, A, D, C).$

因为 $\qquad \mathscr{C}(B, A, D, C)\barwedge\mathscr{C}(A, B, C, D)\barwedge\mathscr{C}(B, A, D, E)$

这就要求 $E=C$，即对应元素 C, D 是互逆对，因而每一对对应元素是互逆对.

12.2 证明：若在直线 x 上由二次曲线 $\mathscr{C}$ 确定的共轭点的对合，被 $\mathscr{C}$ 上的任一点投影到 $\mathscr{C}$ 上，则所得的 $\mathscr{C}$ 上的对合以 x 为对合轴.

证明：在图 12-9 中，设 A_1, A_1'; B_1, B_1' 是关于 $\mathscr{C}$ 的共轭点的对合

$$x(A_1, A_1', B_1, \cdots)\barwedge x(A_1', A_1, B_1', \cdots)$$

的两对互逆对通过 $\mathscr{C}$ 上一点 O，把这个直线上的对合射影在 $\mathscr{C}$ 上的对合：

$$\mathscr{C}(A, A', B, \cdots)\barwedge\mathscr{C}(A', A, B', \cdots).$$

三角形 OAA' 的边 OA, OA' 交 x 于一对共轭点 A_1, A_1'. 根据定理 9.14，x 和 AA' 是共轭的，因此 AA' 在 x 的极点上，x 是 $\mathscr{C}$ 上的对合轴.

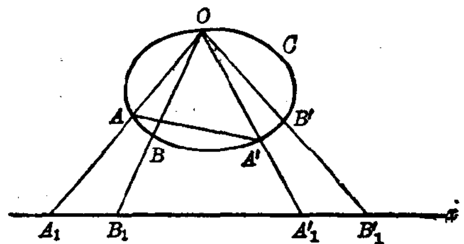


图 12-9

12.3 证明：若二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的四个点是调和的，则 $\mathscr{C}$ 在这些点处的切线也是调和的.

证明：设四点是 A, B, C, D, X 是 $\mathscr{C}$ 上的任意第五点，由假设 (XA, XB, XC, XD) 是调和集. $\mathscr{C}$ 在 A, B, C, D 的切线分别记为 a, b, c, d，根据定理 9.7，若 y 是 $\mathscr{C}$ 的任意切线，则：

$$(XA, XB, XC, XD)\barwedge(y\cdot a, y\cdot b, y\cdot c, y\cdot d).$$

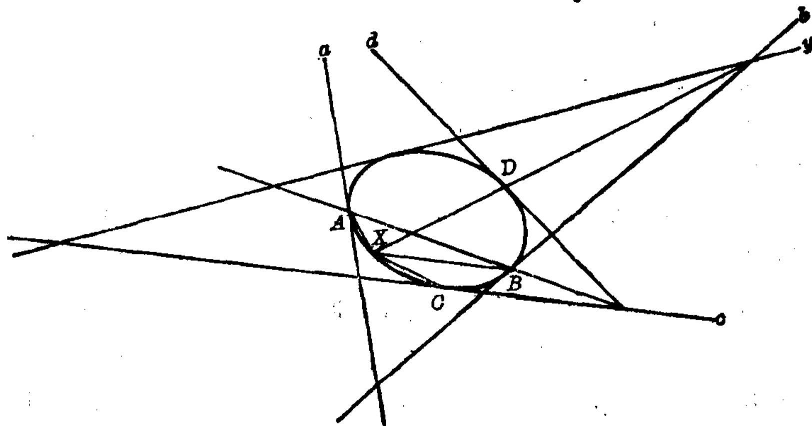


图 12-10

于是，$(y\cdot a,\ y\cdot b,\ y\cdot c,\ y\cdot d)$是调和集，由定义$(a,\ b,\ c,\ d)$也是调和集.

12.4 证明：若A, B, C, D是二次曲线$\mathscr{C}$上的四个调和点，即$H(A, B; C, D)$，则直线AB和CD关于$\mathscr{C}$共轭.

证明：由定义，从$\mathscr{C}$的任一点投影A, B, C, D的直线是调和的，特别有：$H(DA, DB; DC, DV)$其中DV是$\mathscr{C}$在D点的切线. 令$AB\cdot DC=W$, $AB\cdot DV=V$；则$H(A, B; V, W)$，且V的极线是$DW=CD$，于是AB在CD的极点上且这两条直线关于$\mathscr{C}$共轭.

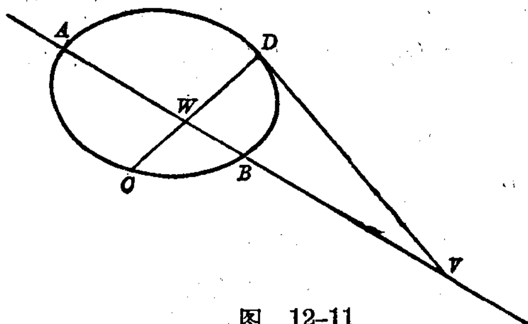


图 12-11

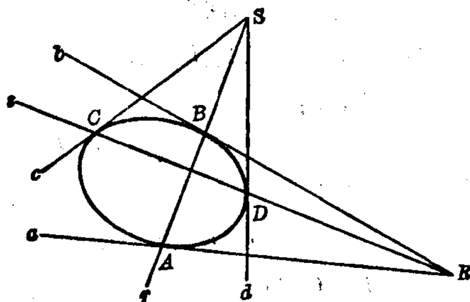


图 12-12

12.5 证明：若关于二次曲线的两个共轭点与二次曲线分别有两组公共的直线对a, b和c, d. 则：$H(a, b; c, d)$.

证明：因为$R=a\cdot b$, $S=c\cdot d$是关于二次曲线的共轭点，所以R在S的极线s上，S在R的极线r上. 现在r和s是共轭线，与$\mathscr{C}$有公共点对A, B和CD. 根据定理12.8, $H(A, B; C, D)$，根据定理12.6, $H(a, b; c, d)$.

§12.3 补 充 题

12.6 作出射影$O(a, b, c, \cdots)\barwedge O(a', b', c', \cdots)$的二重直线(如果有的话).

提示：用O上的任意二次曲线$\mathscr{C}$去截，得$\mathscr{C}(A, B, C, \cdots)\barwedge\mathscr{C}(A', B', C', \cdots)$. 作出这个射影的轴. 把它和$\mathscr{C}$的交点(如果有的话)与$O$连起来.

12.7 探讨射影$x(A_1, B_1, C_1, \cdots)\barwedge x(A_1', B_1', C_1', \cdots)$的二重点(如果有的话)的另一作法.

提示：任作一条与x相切的二次曲线$\mathscr{C}$，从已知点$A_1, B_1, C_1, \cdots, A_1', B_1', C_1', \cdots$作$\mathscr{C}$的切线$a, b, c, \cdots; a', b', c', \cdots$. 得到射影$\mathscr{C}(a, b, c, \cdots)\barwedge\mathscr{C}(a', b', c', \cdots)$的中心$B$. 从$B$作$\mathscr{C}$的切线(如果有的话)交$x$于所求的二重点.

12.8 在一直线上取两对互不分隔的点，作出调和分隔每一对已知点的点对.

12.9 通过考虑三角形ABC和三角形$A'B'C'$，其中A, A'; B, B'; C, C'是对合的三组互逆对，证明定理12.4.

12.10 设一条二次曲线$\mathscr{C}$由下列条件决定：(a)五个点；或(b)四个点和其中一点的切线；或(c)三个点和其中两点的切线；或(a')五条切线；或(b')四条切线和其中一条上的切点；或(c')三条切线和其中两条上的切点. 又设直线p既不在(a), (b), (c)中任一已知点上，又不与(a'), (b'), (c')中任一已知切线重合. 作出p和$\mathscr{C}$的交点(如果有的话).

提示：对于(a)，取两个已知点作为射影中心，从其中每点把其余的点投影到p上，接着从另一二次曲线$\mathscr{C}'$上的任一点O把p的这些点投影到$\mathscr{C}'$上. 作出$\mathscr{C}'$上的射影的二重点(如

果有的话)且通过 O 把它们投影到 p 上. 对于 (b), 取已知切点作为一个射影中心. 对于 (c), 取已知切点作为射影中心. 对于 (a'), (b'), (c'), 先找出各切线的切点, 其它如前.

12.11 设 $\mathscr{C}$ 由习题 12.10 中的 (a), (b), (c); (a'), (b'), (c') 给定, P 是不在任何一已知直线上的一点, 从 P 作 $\mathscr{C}$ 的切线(如果有的话).

12.12 证明定理 12.4 的逆: 一条二次曲线被一个中心不在曲线上的线束所截, 得到的点对形成一个对合. 它的二重点是什么?

12.13 证明: 在一条二次曲线上点之间的对合中, 二次曲线在互逆对上的切线交在对合轴上.

12.14 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的五点 A, B, C, D, E 和一点 R, 从 R 作 $\mathscr{C}$ 的切线(如果有的话).

提示: 利用习题 10.3 和 12.10 的结果. 首先找出 RA, RB 和 $\mathscr{C}$ 的第二个交点 A', B', 然后作对合 $\mathscr{C}(A, A', B) \barwedge \mathscr{C}(A', A, B')$ 的轴 p 和 p 与 $\mathscr{C}$ 的交点(如果有的话).

12.15 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上五条切线和一条直线 r, 作出 r 和 $\mathscr{C}$ 的交点(如果有的话).

12.16 已知四个点 P, Q, R, S (任何三个都不共线)和一条不在任一已知点上的直线 x, 作一条在此四点上且与这直线相切的二次曲线.

提示: 利用定理 11.1, 在 x 上得到由简单四点形 $PQRS$ 确定的对合, 作它的二重点(如果有的话). 每一个二重点连同已知点一起确定一条符合条件的二次曲线. 讨论可能作出的二次曲线的数目.

12.17 已知四条直线 p, q, r, s (任何三条都不共点)和一个不在任何一已知直线上的点 X, 作在 X 上且以四条已知直线为切线的一条二次曲线.

12.18 已知三个不共线点 P, Q, R 和两条不在任何一已知点上的直线 x, y, 作出在已知点上且与已知直线相切的二次曲线.

提示: 利用定理 11.5. 令 $PQ \cdot x = B$, $PQ \cdot y = B'$, 作对合 $(P, Q, B) \barwedge (Q, P, B')$ 的二重点(如果有的话). 令 $PR \cdot x = C$, $PR \cdot y = C'$ 并重复上述过程, 讨论可能作的二次曲线的数目.

12.19 已知三条不共点的直线 p, q, r 和两个不在任何一已知直线上的点 X, Y, 作出在已知点上且与已知直线相切的二次曲线.

12.20 设 P, Q 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的不同点, 在 $\mathscr{C}$ 上确定另一对点 A, B, 使得 $H(A, B; P, Q)$. 点 A, B 是唯一的吗?

12.21 设 A, P, Q 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 上任意三个不同点. 在 $\mathscr{C}$ 上确定一点 B, 使得 $H(A, B; P, Q)$. B 点是唯一的吗?

12.22 设 P, Q, R, S 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 上任意四个不同点, 在什么条件下, 在 $\mathscr{C}$ 上存在点 A, B, 使得 $H(A, B; P, Q)$ 和 $H(A, B; R, S)$?

12.23 在 $\mathscr{C}$ 上取点 P, Q, R, S, 满足习题 12.22 中的条件, 作出点对 A, B.

12.24 叙述并求解习题 12.20～12.23 的对偶.

12.25 证明: 一条直线上的双曲对合的互逆对是关于每条这样的二次曲线的共轭点, 这样的二次曲线交这条直线于这个对合的二重点.

12.26 叙述并证明定理 12.8′ 的逆.

12.27 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的五点, 在任一直线 x 上作出一个关于 $\mathscr{C}$ 的共轭点的对合.

第十三章　平面仿射几何

§13.1　基 本 内 容

1. 引　　言

前面各章包含了平面射影几何最基本的命题. 在开头几章, 我们选取高中的初等几何作为基础的几何. 然后对普通平面作如下的修改便得到了射影平面: (a)给普通平面添加理想点组成的理想直线, (b)把理想点和理想直线与普通点和普通直线等同起来. 不加区别, 亦即把理想点和理想直线当作射影平面的普通点和普通直线对待.

而在这一章, 我们要把顺序倒过来, 也就是说, 我们取平面射影几何作为基础的几何, 并且适当的改造射影平面, 得到另一种几何. 选取射影平面上的(任意)一条直线, 并称它为*理想直线*或*无穷远直线* l_∞, 当把这条直线从此平面上除去时, 则余剩下的点和直线构成*仿射平面*. 这个平面上的几何学就叫做*仿射平面几何学*. 在展开这种几何的时候, 我们总是在射影平面选取一条记为 l_∞ 的直线, "重新发现"初等几何学中的若干类型的定理. 附图可能暂时显得陌生(倘若读者坚持要用与射影几何里相同的图形, 那么您只要在重画它们时"在无穷远处"添加 l_∞).

射影平面里不同的两点 A 和 B 把直线 $p=AB$ 分成两段(见第一章) $\widehat{AB}$ 和 $\underset{\smile}{AB}$. 假设我们选择一条既不在 A 上也不在 B 上的直线作为 l_∞, 则仿射平面上的直线 p 失去了它与 l_∞ 的交点 P_∞, 因而成了一条开直线. 在这仿射直线 p 上, 点 A 和 B 确定且只确定一条线段, 即不包含 P_∞ 的射影直线上的线段 $\widehat{AB}$ 或 $\underset{\smile}{AB}$, 这一线段就简单地记为 AB.

在上面一段中, 从射影平面变到仿射平面, 记号没有改变. 当然我们可以标出不在 l_∞ 的射影点如 A^* 及对应仿射点如 A, 对于不同于 l_∞ 的射影直线及其对应仿射直线也在记号上作类似的改变. 但是我们不这样做, 因为这一章里的所有定理当然是用仿射平面里的点和直线来叙述的, 而在其它地方, 例如直线 p, 是把它看做射影直线还是看作仿射直线, 从上下文总可以清楚地看出.

2. 平　行　线

在射影平面里, 任何两条不同的直线 p 和 q 都相交. 若这交点不在 l_∞ 上, 则射影直线 p 和 q 相交, 若这交点是 l_∞ 上的点, 则仿射直线 p 和 q 不相交. 我们定义:

仿射平面里不相交的两条直线称为*平行线*.

这里我们借助了初等几何的类似求法套用两条不相交直线的位置关系. 而现在射影几何是非度量的, 因此, 读者必须注意不要给"平行"(以及我们从前介绍过的其它类似术语)以度量解释. 因而不必假定仿射平面里的平行线是处处等距的.

从上述平行线的定义可以推出:

定理 13.1 与已知直线平行的所有直线互相平行.

定理 13.2 过直线外一点能且只能作一条直线与已知直线平行.

参看图 13-1, 由定义, 直线 b, c, d 都与 a 平行. 显然 b 平行于 c, 而且, 事实上, 直线 a, b, c, d 互相平行. 又过点 X 且与 a 平行的直线 x 是唯一的, 因为, 根据定义, 射影直线 x 也必须在 a 的理想点 P_∞ 上.

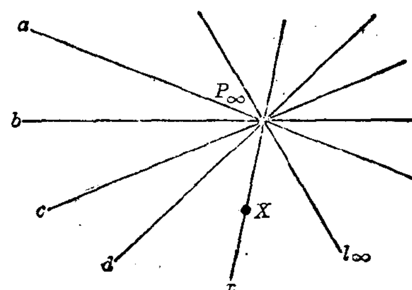


图 13-1

下述定理留给读者证明:

定理 13.3 若一直线与两平行线之一相交, 则这直线与另一直线也相交.

3. 迭合线段

考虑图 13-2 中的完全四点形 $PQRS$, 它以 l_∞ 作为对角三角形的一边. 由于每一对仿射直线 PQ, RS 和 PS, QR 都是由两条平行线组成的, 故此简单四点形 $PQRS$ 称为*平行四边形*. 根据定义, 这个平行四边形的边是线段 PQ, QR, RS, SP. 四点形的其余两边就是平行四边形的对角线(即线段 PR, QS).

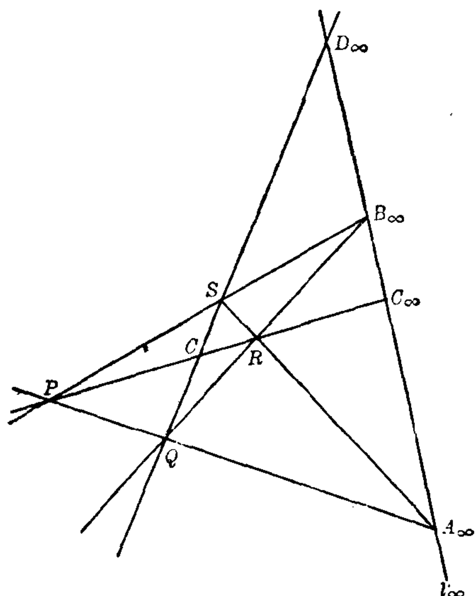


图 13-2

若 $ABCD$ 是平行四边形, 则说线段 AB 和 CD 是*平移迭合的*. 例如, 图 13-2 中, 线段 PQ 和 RS (同样地, PS 和 QR)就是迭合的. 在两平行线上的两条线段通过比较就能确定它们是迭合的还是不迭合的. 我们不难将迭合推广为两条线段在同一直线上的情况. 考虑图 13-3 中的平行四边形 $PP'R'R$ 和 $QQ'R'R$, 它们的边 PP' 和 QQ' 是同一条直线 o 上的线段. 这里 PP' 和 RR' 迭合, 而 RR' 又与 QQ' 迭合. 因此, 自然规定线段 PP' 与 QQ' 是迭合的. 即

设 AA', BB' 是同一直线上的两条线段, 若存在一条线段 CC' 使得 $AA'C'C$ 和 $BB'C'C$ 都是平行四边形, 则称线段 AA', BB' 是*平移迭合的*.

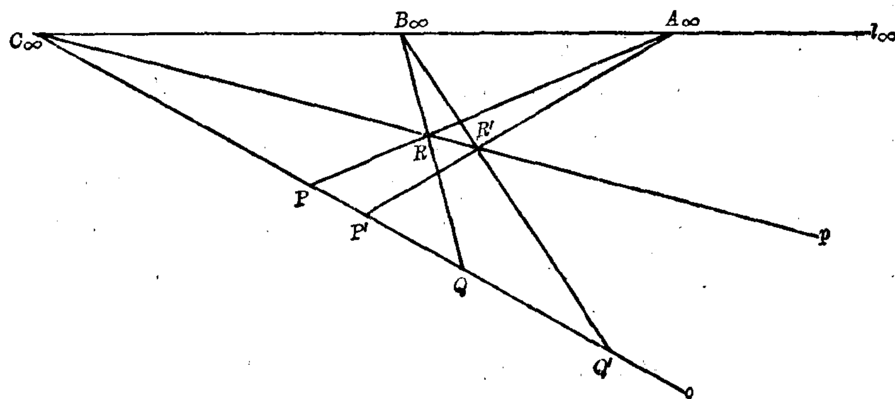


图 13-3

4. 线段的中点

设如图13-3中的两点 P' 和 Q 重合于 M(如图13-4所示)，则线段 PM 和 MQ' 迭合，我们称 M 为线段 PQ' 的中点．令 $PR'\cdot l_\infty=D_\infty$，则完全四点形 $PMR'R$ 确定 l_∞ 上的调和集 $H(C_\infty, A_\infty; D_\infty, B_\infty)$，且由于

$$(C_\infty, A_\infty, D_\infty, B_\infty)\overset{R'}{\wedge}(C_\infty, M, P, Q'),$$

所以 $H(C_\infty, M; P, Q')$．于是我们证明了

定理 13.4 线段 AB 的中点是直线 AB 的理想点关于 A, B 的调和共轭点．

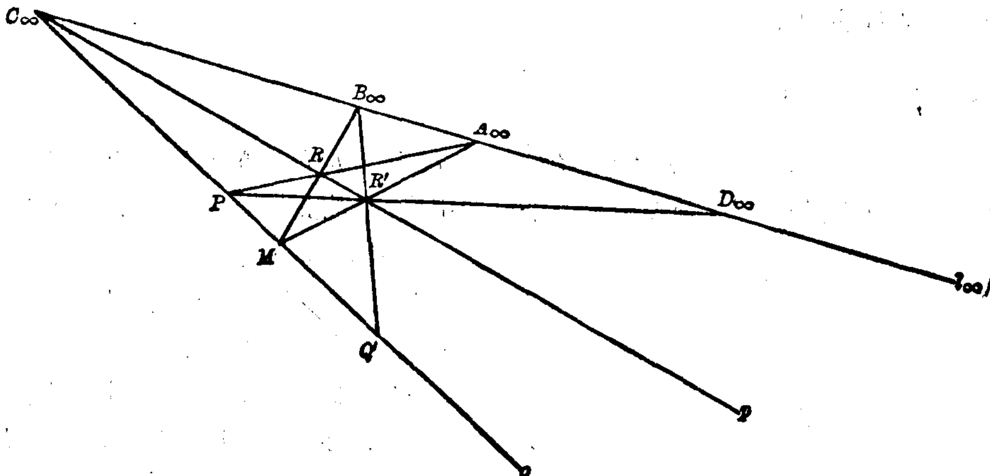


图 13-4

现在回到图13-2，设 $PR\cdot QS=O$．由于 $H(A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty)$，故由 $(R, P, C_\infty, O)\overset{S}{\wedge}(A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty)\overset{B}{\wedge}(S, Q, O, D_\infty)$ 推得：$H(R, P; C_\infty, O)$ 及 $H(S, Q, D_\infty, C)$．根据定理13.4, O 是两线段 PR 和 QS 的中点．于是得到：

定理 13.5 平行四边形对角线的交点是每条对角线的中点．

注1：上述证明由两部分组成．在第一部分，我们在射影平面里（这里对 l_∞ 和它上面的点并不赋予任何特别的重要性）得到 $H(R, P; C_\infty, O)$ 及 $H(S, Q; D_\infty, O)$ 这两个结果．在第二部分，我们根据前面所引进的定义对这些结果作仿射解释．

注2：另一证明如下，在射影平面里，图13-2表示以 O, A_∞, B_∞ 为完全四点形 $PQRS$ 之对边点，且以 C_∞, D_∞ 为其相伴的调和共轭点．于是，由定理4.11，便有 $H(R, P; C_\infty, O)$ 和 $H(S, Q; D_\infty, O)$．其余证明如前．

现在我们列出涉及三角形的两条熟知的定理．将在习题13.1中证明：

定理 13.6 在三角形两边中点上的直线平行于第三边．

我们称三角形 PQR 的一顶点与其它两顶点确定的线段中点的连线 QO 为三角形的中线．又以 PB 和 RA 记这个三角形的其它两边的中线，令 $PB\cdot QO=G$，我们留给读者证明：

定理 13.7 三角形的三条中线共点．这一点 G 叫做三角形的重心或中点．

现在考虑图13-5中的简单平行四边形 $PP'R'R$ 及图13-3中的简单平行四边形 $QQ'R'R$．令 $PR\cdot Q'R'=S$, $P'R'\cdot QR=T$, $m=ST$, $p=RR'$, $m\cdot p=O$; $m\cdot o=M$, $m\cdot l_\infty=M_\infty$．因为 O 是简单平行四边形 $RSR'T$ 对角线 RR' 的中点，故有 $H(R, R'; C_\infty, O)$．先

从 S 然后从 T 向这四个点投影，使得 $H(P, Q'; C_\infty, M)$ 和 $H(Q, P'; C_\infty, M)$，所以 M 是 PQ' 和 $P'Q$ 中的每一个的中点．于是得到：

定理 13.8 若同一直线上的两条线段 PP' 和 QQ' 是迭合的，则线段 PQ' 和 $P'Q$ 有公共的中点．

图 13-5

参看同一图形，已知点 M 是直线 o 上线段 PQ' 和 $P'Q$ 的公共中点，并令 $o\cdot l_\infty=C_\infty$．在 M 上任取一直线 $m\neq o$，并记 $m\cdot l_\infty=M_\infty$．在 l_∞ 上另取一点 A_∞，并作出它关于 C_∞, M_∞ 的调和共轭点 B_∞．令 $PA_\infty\cdot QB_\infty=R$, $PA_\infty\cdot Q'B_\infty=S$, $P'A_\infty\cdot QB_\infty=T$, $P'A_\infty\cdot Q'B_\infty=R'$．现在，$RSR'T$ 是以 $C=RR'\cdot ST$ 为一个对边点的完全平行四边形，设透视 $(P, Q', C_\infty)\overset{S}{\barwedge}(A_\infty, B_\infty, C_\infty)$ 把 M 变到 M'_∞．因为 $H(P, Q'; C_\infty, M)$，故 $H(A_\infty, B_\infty; C_\infty, M'_\infty)$．但据作法，$H(A_\infty, B_\infty, C_\infty, M_\infty)$，于是 $M'_\infty=M_\infty$ 且 S 在 m 上．同理可证，T 在 m 上，从而 C 在 m 上．令 $p\cdot l_\infty=C'_\infty$，因为 $(R', R, C)\overset{T}{\barwedge}(A_\infty, B_\infty, M_\infty)$ 把 C'_∞ 变到 C_∞（为什么?），故 $C'_\infty=C_\infty$ 且 p 在 C_∞ 上．于是 p 平行于 o; $PP'R'R$ 及 $QQ'R'R$ 皆为平行四边形．所以，PP' 和 QQ' 迭合．这便证明了：

定理 13.9 若同一直线上的两条线段 PQ' 和 $P'Q$ 有公共的中点，则线段 PP' 和 QQ' 是迭合的．

5. 长　　度

在图 4-4 中，我们说明了抛物型射影 $(A, B, C, F_1, F_2, \cdots)\barwedge(A, C, F_1, F_2, F_3, \cdots)$ 的作法．现在，在仿射平面上研究这个图形（见图 13-6），我们选取直线 q 为 l_∞，且在记号上作某些必要的改变（特别是对直线 o 上的点）．根据作法，A_0A_1 和 A_1A_2 迭合，A_1A_2 和 A_2A_3 迭合，$\cdots$，A_iA_{i+1} 和 $A_{i+1}A_{i+2}$ 迭合，$\cdots$．于是，对于任意正整数 n，直线 o 上的线段 A_0A_n 由 n 段不交迭的迭合线段所组成．这时我们说距离 A_0A_n 是 A_0A_1 的 n 倍．

当已知 A_0A_1 时，只要注意 $H(M_\infty, A_1; A_0, A_2)$, $H(M_\infty, A_2; A_1, A_3)$, $\cdots$, $H(M_\infty, A_{n-1}; A_{n-2}, A_n)$，便可作出 A_0A_n．

下面我们将考虑已知线段 A_0A_1（见图 13-7）分为 n 条迭合线段的问题（n 是任一给定的正整数）．在 A_0 上任取任一给定的直线 $p\neq o$，在 p 上任取一点 B_1．然后在 p 上定出点 B_n，使得 B_0B_n 是 B_0B_1 的 n 倍，A_1 和 B_n 的连线与 l_∞ 相交于 P_∞，令 $B_iP_\infty\cdot o=A_{i/n}(i=1,\ 2,$

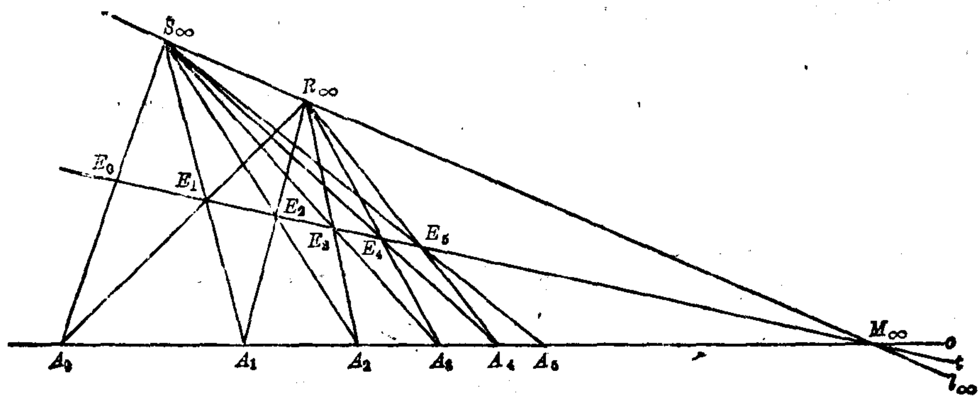


图 13-6

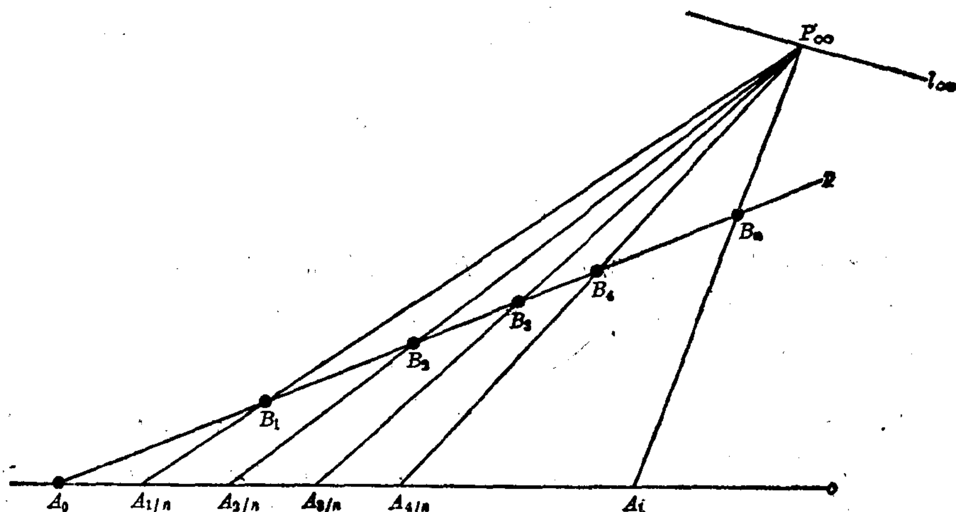


图 13-7

3, …, $n-1$). 则 A_0A_1 是 $A_0A_{1/n}$ 的 n 倍.

我们现在能够在 o 上作出点 A_q, 使得 A_0A_q 是 A_0A_1 的 q 倍, 而 q 是任意有理数(见第七章). 由公理 11 可知, 对于任意实数 r, 在 o 上存在一点 A_r, 使得 A_0A_r 是 A_0A_1 的 r 倍.

现在, 可以把线段 A_0A_r 的长度定为 $\left|\dfrac{A_0A_r}{A_0A_1}\right|=|r|$, 这里 $|r|$ 表示 r 的绝对值. 考察直线 o 上的线段 A_0X 和另一直线 p 上的线段 A_0Y, 它与 o 相交于 A_0, 我们可以在线段 A_0X 上选择任意一点 A_1 而求得 A_0X 的长度. 同样可以在线段 A_0Y 上选取任意一点 B_1 而求得 A_0Y 的长度. 然而这些长度意义不大, 因为无法确定 o 上的度量单位 A_0A_1 是不是与 p 上的度量单位 A_0B_1 一致. 因此, 在仿射几何中, **在非平行直线上的线段是不能比较的.**

6. 二次曲线

在射影平面上, 所有的二次曲线都是等价的, 因此, 所有的二次曲线在 8～12 章中都画成解析几何中的椭圆. 设 $\mathscr{C}$ 是射影平面上的一条二次曲线, 当我们转到仿射平面时, 则有:

(a) $\mathscr{C}$ 与 l_∞ 不相交, $\mathscr{C}$ 称为**椭圆**.

(b) $\mathscr{C}$ 与 l_∞ 相切, $\mathscr{C}$ 称为**抛物线**.

(c) $\mathscr{C}$ 与 l_∞ 相交于两个不同点, $\mathscr{C}$ 称为**双曲线**.

7. 中心和直径

l_∞ 关于已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 的极点叫做 $\mathscr{C}$ 的中心. 椭圆的中心 O 是一个内点(见图 13-8), 双曲线的中心是一个外点; l_∞ 关于抛物线的极点是它与抛物线的切点 O_∞. 严格地说, 抛物线没有中心, 但我们发现, 把 O_∞ 说成中心比较方便. 椭圆和双曲线都叫做有心二次曲线.

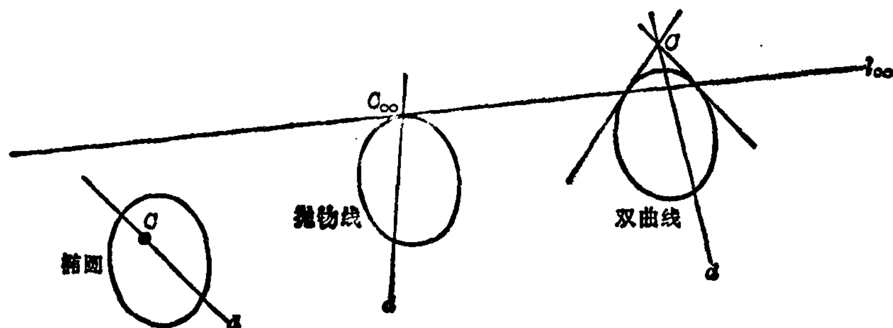


图 13-8

当二次曲线完全给定时,要作它的中心,只要画出 l_∞ 上任意两点的极线的交点(见第九章); 当二次曲线不完全给出时,作出中心的最简单方法(习题 9.3(b)) 需要二次曲线上的三个已知点.

对于有心二次曲线,任意一条通过它的中心的直线叫做直径. 容易推知,有心二次曲线的每一条直径是 l_∞ 上某一点关于此二次曲线的极线. 由于椭圆的中心在其内部, 故每一直径都与它相交于两个不同点, 即它是割线. 而双曲线的中心在其外部, 故其直径可能是割线,可能根本不与它相交. 也可能在它与 l_∞ 的一个交点处相切. 这两条切线叫做双曲线的渐近线. 虽然这两条渐近线都是直径, 但它们具有某些独特的性质, 例如: 这两条渐近线把它与双曲线不相交的直径和双曲线的割线的直径分开. 对于抛物线, l_∞ 上任意一点的极线都在 O_∞ 上, 因而我们可以说, 二次曲线中心上每一条直线都是直径. 仅仅在抛物线的情形,其直径互相平行.

8. 作 图

第 8-10 章的所有作图法在仿射几何里仍然有效, 这是因为我们可以选择 l_∞ 为既不在任意已知点上也不在任意已知切线上. 另一方面, 在适当选择 l_∞ 后,仿射作法可由射影作法变形得到.

例 13.1 考虑习题 10.5: 已知点 $A_{1,2}$, A_3, A_4, A_5 和切线 $t_{1,2}$, 在二次曲线上作出另外一点. 按照所示 l_∞ 的选择,作出下列图形:

(1) 已知抛物线的中心及其三个点,作出曲线的另一点,取 l_∞ 为 $t_{1,2}$.

(2) 已知双曲线上三点和其中一点的切线以及一渐近线上的理想点, 作出曲线的另一点.

取 l_∞ 在 A_3 上.

(3) 已知双曲线上两点及其中一点的切线以及两条渐近线上的理想点. 作出曲线上的另一点,

取 l_∞ 在 A_3 和 A_4 上.

(4) 已知双曲线上的三点和它的一条渐近线，作出曲线的另一点.

取 $l_\infty \neq t_{1,2}$ 在 $A_{1,2}$ 上.

(5) 已知双曲线的两点，一条渐近线和另一渐近线上的理想点，作出曲线的另一点.

取 l_∞ 在 $A_{1,2}$ 和 A_3 上.

(6) 已知双曲线的三点，其中一点的切线和另一条渐近线上的理想点，作出另一条渐近线上的理想点.

取在 A_5 上的 $l_{5,6}$，作为 l_∞.

9. 共 轭 直 径

设 P 和 Q 是二次曲线上不同的两点，线段 PQ 称为二次曲线的弦. 现在考虑给定二次曲线的一组平行弦. 这些弦所在的射影直径在一公共点 A_∞ 上，而 A_∞ 关于这条二次曲线的极线在每一条弦的中点上. 因此，我们有：

定理 13.10 二次曲线 $\mathscr{C}$ 的一组平行弦的中点在 $\mathscr{C}$ 的一条直径上.

因此，已知二次曲线直径的作法可以简化为：连接二次曲线任意两条不同的平行弦的中点. 而其中心的作法，则可简化为作出二次曲线的任意两条不同直径之交点.

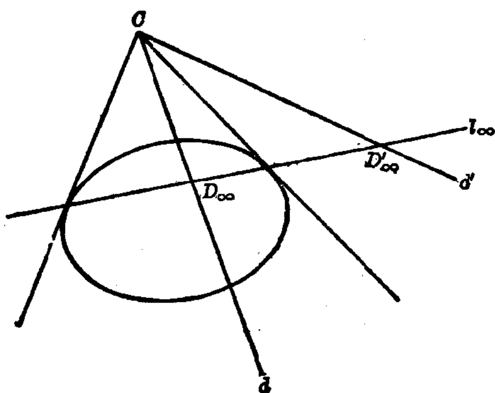


图 13-9

考虑图 13-9 中的有心二次曲线 $\mathscr{C}$ 和它的任一直径 d. 设 $d\cdot l_\infty = D_\infty$，于是 D_∞ 关于 $\mathscr{C}$ 的极线一般说来是 $\mathscr{C}$ 的另一条直径 d'（读者可以验证除 d 是双曲线的渐近线外，这一结论是正确的. 为了避免这种例外情况，今后在下述约定下进行研究；无论我们给出的是有心二次曲线的切线还是直径，它们都不是双曲线的渐近线）. 设 $d'\cdot l_\infty = D'_\infty$，则直线 d 关于 $\mathscr{C}$ 与 d' 共轭（为什么？）. 因此，d 和 d' 叫做 $\mathscr{C}$ 的一对*共轭直径*. 这样作下去，$\mathscr{C}$ 的直径可以分为共轭对. 现在假定我们从直径 d 出发，则 d' 的共轭是 d. 这一点留给读者去证明. 于是得到：

定理 13.11 有心二次曲线 $\mathscr{C}$ 的共轭直径对都是在 $\mathscr{C}$ 的中心 $\mathscr{C}$ 上的对合中的互逆对.

若 $\mathscr{C}$ 是椭圆，定理 13.11 中的对合没有二重元素，这时称它是*椭圆型的*. 若 $\mathscr{C}$ 是双曲线时，对合有两个不同的二重元素（即渐近线），这时称它为*双曲型的*.

下述定理的证明留给读者.

定理 13.12 内接于二次曲线的任一平行四边形以二次曲线的两条直径为对角线，且以平行于一对共轭直径的直线为边.

10. 双 曲 线

在这一节里，我们研究有关二次曲线的渐近线的定理. 其中大多数只是简单地作为射影定理的仿射解释而得到的. 例如定理 9.13′ 引出：

定理 13.13 若双曲线的一条切线与渐近线相交于 A 和 A'，则在 A 和 A' 上的任意两

条平行线构成共轭对.

这是因为双曲线之中心与 l_∞ 上任意一点构成共轭对.

又由习题 9.30 所述定理引出:

定理 13.14 双曲线的任意一对共轭直径调和分隔两条渐近线.

在习题 13.8 中,我们将证明:

定理 13.15 若双曲线在点 M 的切线分割交渐近线 a 和 a' 于 A 和 A', X 是在 M 上平行于 a' 的直线上的任一点,则 X 的极线 x 在 A' 上且与 AX 平行.

现在考虑图 13-10 中以 a 和 a' 为渐近线的双曲线 $\mathscr{C}$. 设 d 和 d' 是一对共轭直径, 它们分别与 l_∞ 相交于 D_∞ 和 D'_∞. 在 D'_∞ 上任取一直线 o 与 $\mathscr{C}$ 相交于 P, Q, 与两渐近线相交于 A, A'. 则 $M=o\cdot d$ 是弦 PQ 与两渐近线相交于 A 和 A',则 AP 与 QA' 迭合.

我们将有

定理 13.16 若双曲线的一条弦 PQ 与两条渐近线交于 A 和 A', 则 AP 和 QA' 迭合.

作为定理 13.16 的特殊情况(也可直接证明),我们有:

定理 13.17 双曲线上切线的切点是被渐近线所截切线线段的中点.

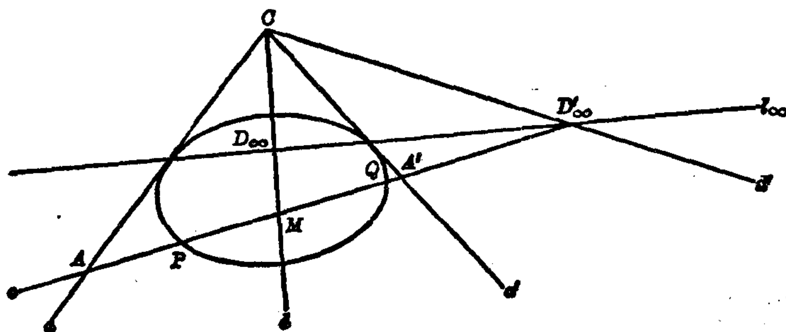


图 13-10

§13.2 问题及其解

13.1 证明: 在三角形两边中点上的直线平行于第三边.

证明: 考察图 13-11 中的三角形 PQR, 令 $PQ\cdot l_\infty=A_\infty$, $QR\cdot l_\infty=B_\infty$, $RP\cdot l_\infty=C_\infty$, 记 PQ 的中点为 K, RP 的中点为 L. 由 $H(P, Q; A_\infty, K)$, $H(P, R; C_\infty, L)$, 已知 K, L 是透视

$$(P, Q, A_\infty, \cdots)\overset{B_\infty}{\barwedge}(P, R, C_\infty, \cdots)$$

中的对应点. 所以 K, L, B_∞ 共线, 于是 $KL /\!/ QR$.

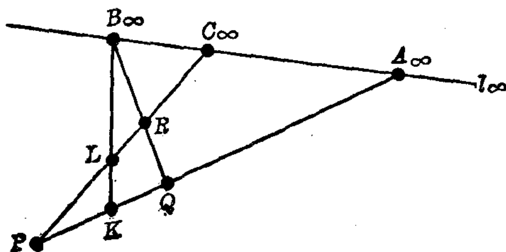


图 13-11

这个(仿射)定理也可以在习题 4.2 的注中所叙述的射影定理得到, 只要取交三角形边的直线为 l_∞. 因为这时交点的调和共轭点是边的中点. 且任意两个中点的连线由于与三角形第三边上的理想点共线,所以平行于第三边.

13.2 已知三角形 PQR 和不在它任一顶点上的一条直线 o, 令 $PQ\cdot o=A$, $QR\cdot o=B$,

$RP\cdot o=C$, $o\cdot l_\infty=O_\infty$, 并设T为o上另一点．若A', B', C'是o上的点，使得每条线段AA', BB', CC'都以T为中点．证明：直线PB', QC', RA'共点．

证明：参看图13-12．令$PB'\cdot RA'=S$．考虑完全四点形$PQRS$, 它的三条对边与直线交于o上对合的三对互逆点，其中两对为A, A'和B, B', 因为，这个对合有二重点T, O_∞, 所以第三对点为C, C'．于是$QS=QC'$且QC'在S上，

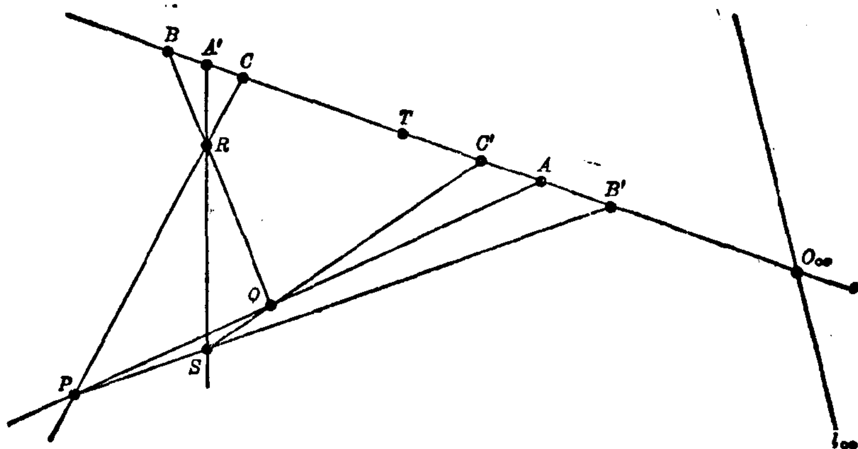


图　13-12

这个仿射定理是射影平面中作图的副产品，即作在o上以下，U为二重点的双曲对合中A, B, C点的相伴点，当U取为o上的理想点时，即得此定理．

13.3　若三角形PQR三边的中点分别为P', Q', R'．证明：$H(P'P, P'R; P'Q', P'R')$.

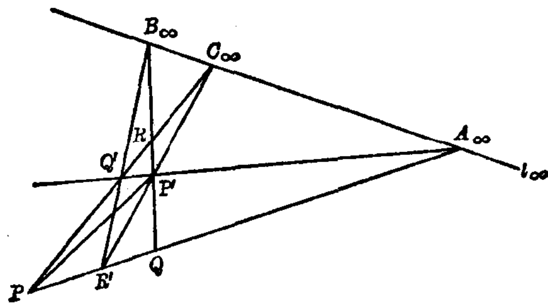


图　13-13

证明：参看图13-13，其中$PR\cdot l_\infty=C_\infty$．由定理13.6，$P'R'$平行$PR$，所以，也在$C_\infty$上，现在$(P'P, P'R, P'Q', P'R')\barwedge(P, R, Q', C_\infty)$，且按作图，$Q'$是线段$PR$的中点，所以$H(P, R; Q', C_\infty)$，于是：$H(P'P, P'R; P'Q', P'R')$.

13.4　证明：若二次曲线$\mathscr{C}$的直径d交$\mathscr{C}$于不同点，则这些点所作$\mathscr{C}$的切线平行．

证明：设d交$\mathscr{C}$于P, R, 因为$d=PR$在$\mathscr{C}$的中心上，它关于$\mathscr{C}$的极点是l_∞上的集点A_∞, 由定理9.9, $\mathscr{C}$在P, Q的切线A_∞上，所以互相平行．

当$\mathscr{C}$是平行线时，它在l_∞的任何点上的切线之一是l_∞本身．所以，抛物线的两条切线决不平行．

13.5　证明：若AA'是二次曲线$\mathscr{C}$的任一弦，它的中点在$\mathscr{C}$的直径d上，则$\mathscr{C}$在A, A'处的切线交在d上．

证明：令$AA'\cdot d=A''$, $AA'\cdot l_\infty=A_\infty$, 则$H(A, A'; A_\infty, A'')$, 且$d$是$A_\infty$关于$\mathscr{C}$的极线（为什么?），记$\mathscr{C}$在$A$, A'处的切线的交点为T, 现在T是AA'关于$\mathscr{C}$的极点，由定理9.9的对偶，T在d上．

13.6　设$\mathscr{C}$是一条二次曲线，P为定点，当$\mathscr{C}$是双曲线时，P是不在其渐近线上，证明：P上$\mathscr{C}$的弦的中点在另一条二次曲线上．

证明：假定 $\mathscr{C}$ 是一条有心二次曲线，其中心是 C，设在 P 上任一弦 x 交 $\mathscr{C}$ 于 Q, Q'，令 $x\cdot l_\infty = X_\infty$(我们不排除 P 在 $\mathscr{C}$ 上，因而 $Q=P$ 的情况)．X_∞ 关于 $\mathscr{C}$ 的极线 x' 在线段 QQ' 的中点上，也在 C 上，现在令 x 在 P 上变动，由定理9.10有：

$$P(x)\barwedge l_\infty(X_\infty)\barwedge C(x'),$$

所以，$P(x)\barwedge C(x')$．因为当 $\mathscr{C}$ 为双曲线时，P 不在渐近线上，所以 PC 不会自对应，且这个射影不是透视，所以由定义，x, x' 在一条二次曲线上．此二次曲线也在 P 和 C 上．

$\mathscr{C}$ 是抛物线的情况留给读者考虑．

13.7 已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 的中心 C 和它的三条互不平行的切线，作出另外若干条切线．

解：记已知切线 a_1, a_3, a_5 (见图13-14)．令 $a_i\cdot l_\infty = A_{\infty,i}$, $CA_{\infty,i}=c_i(i=1, 3, 5)$．在 $A_{\infty,1}$ 上有 C 的第二条切线，称为 a_2．现在 $A_{\infty,1}$ 的极线在 C 上，也在切线 a_1, a_2 的切点 A_1, A_2 上．令 $A_1A_2\cdot l_\infty = B_\infty$，则因 $H(C, B_\infty; A_1, A_2)$，故也有 $H(c_1, l_\infty; a_1, a_2)$，所以 a_2 可以作出．同理，平行于 a_3 的切线 a_4 也能作出，于是另外的切线利用布利安桑定理也能作出．

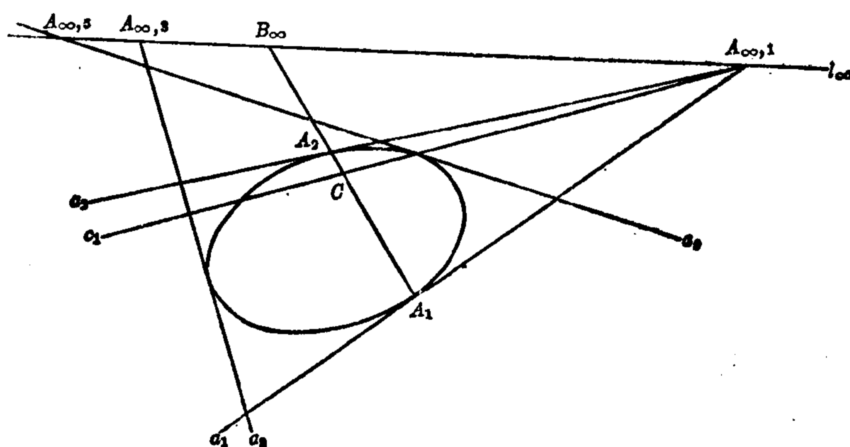


图 13-14

13.8 证明：若双曲线在点 M 处的切线分别交渐近线 a, a' 于 A, A', X 是在 M 上且平行于 a' 的直线上任一点，则 X 的极线 x 在 A' 上且平行于 AX．

证明：参看图13-15，其中 m 为 M 处的切线，X 是 MA'_∞ 上任一点．令 $AX\cdot l_\infty = B_\infty$，

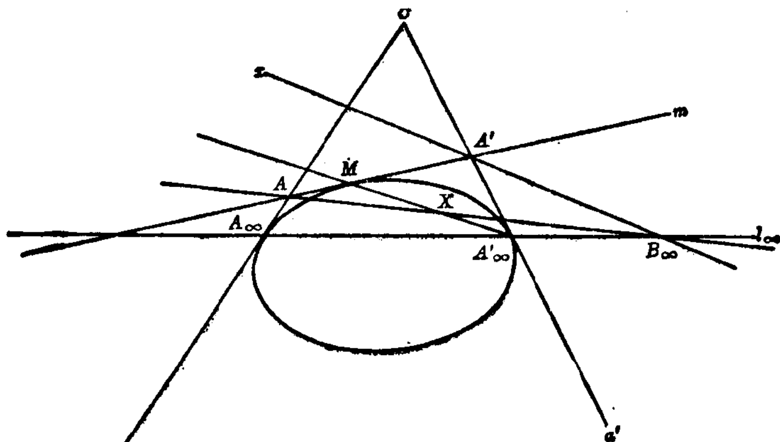


图 13-15

我们要证明：$x=A'B_\infty$. 由定理 13.13, AB_∞ 和 $A'B_\infty$ 是关于双曲线的共轭线对，同时，因为 A' 是 MA'_∞ 的极点，$A'B_\infty$ 和 MA'_∞ 是共轭对，于是 $A'B_\infty$ 的极点是 $AB_\infty \cdot MA'_\infty = X$, 或者说 X 的极线 x 是 $A'B_\infty$.

§13.3 补 充 题

13.9 在射影平面上，有一条直线记为 l_∞, 设一已知直线 p 交 l_∞ 于 P_∞, 在 p 上有四个不同点 A, B, C, D 且点 E 不在这条直线上.

(a) 在 E 上作直线 q 平行于 p.

(b) 作点 F, 使得 $ABEF$ 为平行四边形.

(c) 作点 G, 使得 $AEGB$ 为平行四边形.

(d) 给出 E 是线段 FG 中点的两种证明.

(e) 写出证明线段 AB 和 CD 迭合成或不迭合的步骤.

13.10 证明：若 $PQRS$ 是平行四边形，则完全四点形 $PQRS$ 有两个对边点在 l_∞ 上. 反之亦成立.

13.11 证明：在三角形一顶点上的中线关于这点上的两条边的调和共轭线平行于第三边.

13.12 证明：两条已知平行线 r 和 s 被所有不平行它们的直线所截，截得线段的中点在一条与已知直线平行的直线上.

提示：在任何不平行于 r 和 s 的直线 p 上，令 $r\cdot p=R$, $s\cdot p=S$, $RS\cdot l_\infty=L_\infty$, 令 T 是线段 RS 的中点. 考察从 $r\cdot s$ 到其它不平行直线上的这些点所作的射影.

13.13 在图 13-11 中，令 $LA_\infty\cdot QR=M$, 证明：连结一个三角形两边中点所得线段的长度等于第三边长度的一半.

13.14 证明：若直线 x 上三个不同点 A_1, A_2, A_3 和直线 y 上的三个不同点 A'_1, A'_2, A'_3 使得 $A_1A'_2$, A'_1A_2 平行，$A_2A'_3$, A'_2A_3 平行，则 $A_1A'_3$, A'_1A_3 平行.

13.15 证明：定理 13.7.

13.16 在图 9-1 中，取

(a) $PT=l_\infty$, 证明 $\mathscr{C}$ 是一个椭圆，P_1 是它的中心，p 和 XX_1 是直径.

(b) $PK=l_\infty$, 确定 $\mathscr{C}$ 的中心.

(c) $KT=l_\infty$, 证明 $\mathscr{C}$ 是一条双曲线，确定它的中心和渐近线.

(d) l_∞ 使得 $\mathscr{C}$ 是一条抛物线.

13.17 对于任何有心曲线 $\mathscr{C}$ 和 l_∞ 上任一点 P_∞, 找出下列各点的仿射解释：

(a) 极线的定义：——若直径 d 在 $\mathscr{C}$ 的两条平行弦 AA' 和 BB' 的中点上，则 $AB\cdot A'B'$ 和 $AB'\cdot A'B$ 都在 d 上.

(b) 定理 9.1：——l_∞ 上任一点关于 $\mathscr{C}$ 的极线是 $\mathscr{C}$ 的直径.

(c) 定理 9.3：——若从 $\mathscr{C}$ 的直径 d 上任一点能作 $\mathscr{C}$ 的两条切线 a 和 a', 则 d 关于 a, a' 的调和共轭线的平行弦族的中点都在 d 上.

(d) 定理 9.4：——若从 $\mathscr{C}$ 的直径 d 上任一点能作 $\mathscr{C}$ 的两条切线，则 d 与这两条切线的切点的弦交于弦的中点.

13.18 证明：二次曲线的两条平行切线的切点在一条直径上.

13.19 在习题 13, 16(a), (c), (d)中, 分别说出一对共轭直径(如果存在的话).

部分答案：(c)PM 和 PN.

13.20 证明：若二次曲线分别交它的两条直径于 P, R 和 Q, S, 则 $PQRS$ 是一个平行四边形.

13.21 证明：定理 13.12.

13.22 证明：若二次曲线的一条直径上的两点可以各画两条切线 a, a'; b, b', 则二直线：$(a\cdot b)(a'\cdot b')$ 和 $(a\cdot b')(a'\cdot b)$ 都平行于中点在 d 上的弦族.

在习题 13.23——13.28 中, C 是有心曲线.

13.23 证明：若 P 是 $\mathscr{C}$ 的直径 d 上任一点, 则 P 的极线平行于共轭直径 d'.

提示：令 $d\cdot l_\infty = D_\infty$, $d'\cdot l_\infty = D'_\infty$, 则 D'_∞ 是 d 的极点.

13.24 证明：若 d 和 d' 是 $\mathscr{C}$ 的一对共轭直径, 则 $d'(d)$ 平行于中点在 $d(d')$ 上的平行弦组.

13.25 设 $\mathscr{C}$ 的任一直径 d 交 $\mathscr{C}$ 于 D 和 D', e 和 e' 是 $\mathscr{C}$ 的任一对共轭直径. 证明：在 D 和 D' 上平行 e 或 e' 的直线交于 $\mathscr{C}$ 上的点 F 和 G, 且 FG 是 $\mathscr{C}$ 的一条直径.

13.26 设 $\mathscr{C}$ 的平行切线 a 和 a' 的切点分别是 A 和 A', B 是 $\mathscr{C}$ 的任意第三条切线 b 的切点. 证明 $a\cdot b$ 在平行于 $A'B$ 的直径上, $a'\cdot b$ 在平行于 AB 的直径上.

13.27 设 $\mathscr{C}$ 的平行切线 a 和 a' 的切点分别是 A 和 A', b 是 $\mathscr{C}$ 的另一切线, d 是在 $a\cdot b$ 上的 $\mathscr{C}$ 的直径, 确定 b 的切点 B.

13.28 若 $\mathscr{C}$ 的共轭直径 d 和 d' 分别交 $\mathscr{C}$ 于 A, B 和 D, E, P 是 $\mathscr{C}$ 上的另一点, q 是平行于 d' 的直线, 证明 $R=AP\cdot q$ 和 $S=BP\cdot q$ 是关于 $\mathscr{C}$ 的共轭点.

13.29 若 M 是一条抛物线的弦 PQ 的中点, O 是 PQ 的极点, 证明：抛物线交线段 OM 于它的中点.

13.30 已知抛物线的四条切线, 作出共轭于一条已知切线的直径.

提示：第五条切线是 l_∞.

13.31 已知抛物线的一条直径 d 和(a)它的三个点或(b)它的三条切线, 作出这条抛物线.

13.32 证明：若 d 和 d' 是双曲线的一对共轭直径, 则一条与双曲线相交而另一条不相交.

13.33 一个平行四边形的边平行于双曲线 $\mathscr{C}$ 的渐近线, 若它的一条对角线是 $\mathscr{C}$ 的弦. 证明：另一条对角线是 $\mathscr{C}$ 的直径.

提示：参看习题 10.25.

13.34 证明：若双曲线的一条切线被其渐近线所截, 则切点是截得线段的中点.

13.35 在已知点 A 上且平行于一条渐近线的直线 p 交双曲线于 P, 交 A 的极线于 B, 证明 P 是线段 AB 的中点.

13.36 已知双曲线的两条切线, 其中一条的切点和一条渐近线, 作出：

(a) 第二条切线的切点.

(b) 过这条渐近线上任一点的切线.

(c) 在另一渐近线上的理想点.

(d) 双曲线的中心.

(e) 另一条渐近线.

13.37 证明：一个四点形关于九点二次曲线在对角三角形的顶点和由这个四点形的顶点所确定的六条线段(即完全四点形的边)的中点上.

13.38 证明：在习题13.37中，完全四点形对边的中点连线是九点二次曲线的直径.

第十四章　平面欧氏几何

§14.1 基 本 内 容

1. 引　　言

前面我们由实射影几何通过下面两点引出了仿射几何：(1)在射影平面上选取任意一条直线，记为 l_∞；(2)若射影直线 x 和 y 相交于 l_∞ 上同一点，则定义仿射直线 x 和 y 平行．在这种几何里，当且仅当两条线段在同一直线或平行线上时才可以比较．

但是一旦我们有了在非平行直线上比较两条线段的方法，仿射几何就变成了欧几里德几何．进而，只要我们说明两条直线何时垂直，便提供了这种比较方法．因为这时椭圆可以分为两类——圆和非圆——而当 A, B 都在以 O 为中心的圆上时，就可以通过旋转来定义非平行线段 OA 和 OB 为全等．

2. 垂　　线

在初等度量几何中，下述垂线的性质表明我们怎样定义垂直：

若直线 a 垂直于 a'，则 a' 垂直于 a.

直线与自身不垂直.

第一条性质揭示了一对垂线和一个对合的互逆对之间的联系．第二条性质要求这个对合是椭圆型的．

我们还是从射影平面着手．这时射影平面上的直线 l_∞ 和平行直线都按第十三章所述．在 l_∞ 上任取一椭圆型对合，记为 $\mathscr{A}$，称这个对合为绝对对合或垂直对合，并把它的互逆对记为 $\overline{A}_\infty$, $\overline{A}'_\infty$; $\overline{B}_\infty$, $\overline{B}'_\infty$; $\overline{C}_\infty$, $\overline{C}'_\infty$; …(在第十三章的每个图中都出现了直线 l_∞，但在这一章 l_∞ 至少要在它上面确定了绝对对合的两对互逆对时才会出现)．

当射影直线 x 和 x' 在绝对对合的互逆对上时，两仿射直线 x 和 x' 称为是垂直的．在图 14-1 中 $\overline{A}_\infty$ 上的直线 a 与 $\overline{A}'_\infty$ 上的直线 a' 垂直．同样，b_1 和 b'(b_2 和 b')垂直．

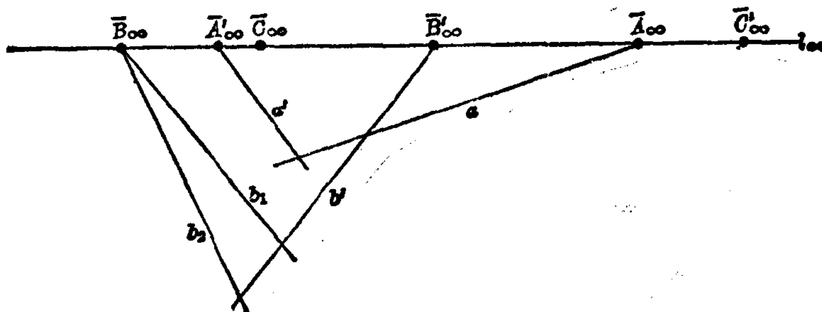


图 14-1

由此，容易推出下述定理：

定理 14.1　在任一点上有且只有一条直线垂直于一已知直线.

定理 14.2　垂直于同一直线的两条直线平行.

定理 14.3　与两条平行线之一垂直的任一直线也与另一条直线垂直.

定理 14.4　在以 P 为中心的任意线束中，垂线对是在 P 上线对合的互逆对.

定理 14.4 中所述的对合，它的互逆对与绝对对合 $\mathscr{A}$ 之互逆对一致，叫做 P 上的圆对合.

现在，我们列出下列定义：

由一对垂线形成的角叫做*直角*.

设 PQ 是直线 o 上以 M 为中点的线段，则过 M 且垂直于 o 的直线叫做这个线段的*垂直平分线*.

如果三角形的两边是两条垂线上的线段，则此三角形叫做*直角三角形*．否则，叫做*斜三角形*.

过三角形一顶点且与其对边垂直的直线叫做三角形的*高线*.

过任一顶点的高线与其对边的交点叫做*垂足*.

斜三角形的垂足是它的*垂足三角形*的顶点.

二邻边垂直的平行四边形叫做*矩形*.

我们将在习题 14.1 中证明：

定理 14.5　任一三角形的高线共点.

定理 14.5 中的共线点叫做三角形的*垂心*.

3. 圆

设 P, Q 是两个不同的普通点(见图 14-2)，令 $PQ\cdot l_\infty=\bar{P}_\infty$，并记 $\mathscr{A}$ 中的 $\bar{P}_\infty$ 的对应点为 $\bar{P}'_\infty$．因为

$$(\bar{A}_\infty, \bar{A}'_\infty, \bar{B}_\infty, \bar{B}'_\infty, \cdots, \bar{P}_\infty, \bar{P}'_\infty, \cdots)\barwedge(\bar{A}'_\infty, \bar{A}_\infty, \bar{B}'_\infty, \bar{B}_\infty, \cdots, \bar{P}'_\infty, \bar{P}_\infty, \cdots).$$

我们有 $(P\bar{A}_\infty, P\bar{A}'_\infty, P\bar{B}_\infty, P\bar{B}'_\infty, \cdots, P\bar{P}_\infty, P\bar{P}'_\infty, \cdots)\doublebarwedge(\bar{A}_\infty, \bar{A}'_\infty, \bar{B}_\infty, \bar{B}'_\infty, \cdots, \bar{P}_\infty, \bar{P}'_\infty, \cdots)\barwedge(\bar{A}'_\infty, \bar{A}_\infty, \bar{B}'_\infty, \bar{B}_\infty, \cdots, \bar{P}'_\infty, \bar{P}_\infty, \cdots)\doublebarwedge(Q\bar{A}'_\infty, Q\bar{A}_\infty, Q\bar{B}'_\infty, Q\bar{B}_\infty, \cdots, Q\bar{P}'_\infty, Q\bar{P}_\infty, \cdots)$，所以 $(P\bar{A}_\infty, P\bar{A}'_\infty, P\bar{B}_\infty, P\bar{B}'_\infty, \cdots, P\bar{P}_\infty, P\bar{P}'_\infty, \cdots)\barwedge(Q\bar{A}'_\infty, Q\bar{A}_\infty, Q\bar{B}'_\infty, Q\bar{B}_\infty, \cdots, Q\bar{P}'_\infty, Q\bar{P}_\infty, \cdots)$.

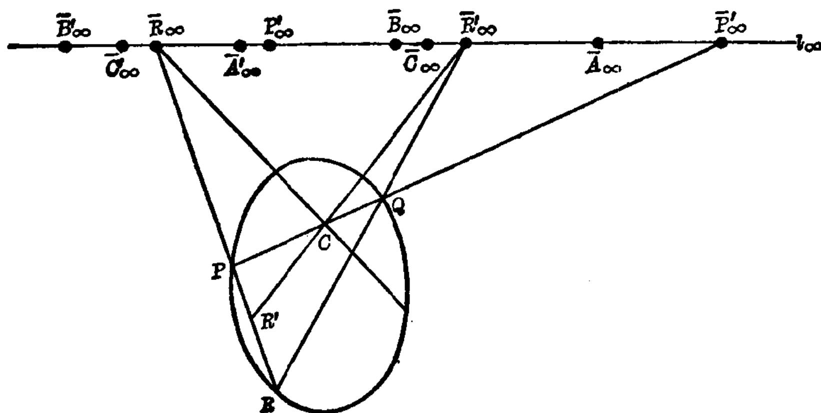


图 14-2

由这个射影定义的二次曲线是在点 P, Q 上的椭圆(为什么?). 在此射影中, PQ 的对应线作为 P 上之线束中的直线是切线 $Q\bar{P}'_\infty$, 而作为 Q 上之线束中的直线是切线 $P\bar{P}'_\infty$. 由于 $P\bar{P}'_\infty$ 和 $Q\bar{P}'_\infty$ 是一对平行的切线,故 PQ 是椭圆的直径,PQ 的中点 C 是椭圆的中心.

设 $\bar{R}_\infty$, $\bar{R}'_\infty$ 是 $\mathscr{A}$ 的另一互逆对,令 $P\bar{R}_\infty \cdot Q\bar{R}'_\infty = R$, $P\bar{R}_\infty \cdot C\bar{R}'_\infty = R'$,则从

$$(P,\ Q,\ C,\ \bar{P}_\infty) \overset{\bar{R}'_\infty}{\barwedge} (P,\ R,\ R',\ \bar{R}_\infty)$$

便得 $H(P,\ R;\ R',\ \bar{R}_\infty)$, 所以 R' 是弦 PR 的中点. 于是 $\bar{R}_\infty$ 关于椭圆的极线是 $CR' = C\bar{R}'_\infty$,从而 $\bar{R}'_\infty$ 的极线是 $C\bar{R}_\infty$. 所以 $C\bar{R}_\infty$ 和 $C\bar{R}'_\infty$ 是一对共轭直径. 但 $\bar{R}_\infty$, $\bar{R}'_\infty$ 是 $\mathscr{A}$ 的任意一对互逆对,因此,$\mathscr{A}$ 的每一互逆对与中心 C 的连线构成这个椭圆的共轭直径的对合.以后,若椭圆的共轭直径对在 l_∞ 上截出绝对对合或者它的共轭直径的对合是圆对合, 我们就称此椭圆为圆. 因此, 现在椭圆这个名称是专指不与 l_∞ 相交且它的共轭直径的对合不是圆对合的有心二次曲线.

从上述讨论容易得到:

定理 14.6 内接于半圆的角是直角.

定理 14.7 圆中任一弦的垂直平分线过圆的中心.

定理 14.8 过圆的直径端点的切线与该直径垂直.

定理 14.9 共轭于圆内已知弦的直径是这弦的垂直平分线.

定理 14.10 过两定点的每一对垂线的交点都在同一圆上, 这圆以这两点的连接线段为直径.

所以以线段 PP' 为直径的圆是使 PX 和 $P'X$ 垂直的交点 X 的轨迹.

定理 13.2 和定理 14.6 意味着下述定理:

定理 14.11 内接于圆的平行四边形是矩形,它的对角线是圆的直径, 它的边是平行于圆的共轭直径对.

4. 迭合线段

设 C 是圆的中心. X 是圆上一点, 则线段 CX 叫做圆的半径. 例如, 在图 14-2 中, CP, CQ, CR 都是圆的半径. 而 CP 和 CQ 是迭合的, 因为 C 是 PQ 的中点. 我们把线段迭合的概念推广到下面两种情况:

(a) 一个圆的所有半径的迭合:

若两条线段 CX 和 CY 都是同一圆的半径,则说它们是*旋转迭合的*.

(b) 非平行线上的两线段的迭合:

若存在线段 CX, CY, 它们通过平移分别与 PQ, RS 迭合且又是旋转迭合的, 则线段 PQ 和 RS 称为是*迭合的*.

现在我们可以把已知直线上的度量单位转移到平面上的其它直线上去. 因此, 任何两条线段都可以进行比较,因为它们的长度都以共同的度量单位表示的.

设 A, B, C 是三个不共线的点,O 是线段 AB 和 BC 的垂直平分线的交点. 用 $\mathscr{C}$ 表示以 O 为中心,AB 为弦的圆,$\mathscr{C}'$ 表示以 O 为中心,BC 为弦的圆(见习题 14.2). 因为 OB 同时是 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的半径,所以它们实际上是同一个圆. 于是证明了:

定理 14.12 任意三个不共线的点确定唯一一个圆.

5. 角

在初等几何里，图 14-3(a)中顶点在 C 的角，有各种各样的记法：如 $\angle C$，$\angle ACB$，$\angle BCA$ 等．现在，我们用有向角来取代它，定义如下：



图 14-3

从 AC 到 CB 的有向角是指由直线 $a=AC$ 绕 C 反时针转到与 $b=CB$ 重合时所扫过的角．

有向角总是正的且小于 $180°$，我们将它记为 (ab) 或 (ACB)．应该强调指出，有向角 (ACB) 与 a 上的 $A\neq C$ 及 b 上的 $B\neq C$ 的位置无关．例如，在图 14-3(a)中，$(ab)=(ACB)=\angle ACB$，而在图 14-3(b)中，$(ab)=(ACB)$ 都是 $\angle ACB$ 的补角．同样，在图 14-4 中，当 C，D 同在 AB 一侧时，$\angle ACB=\angle ADB$，而当 C，D 在 AB 的两侧时，它们是互补的．但在上述两种情况中，有向角 (ACB) 和 (ADB) 都相等．于是我们有：

若四个不同点 A，B，C，D 共圆，则 $(ACB)=(ADB)$．

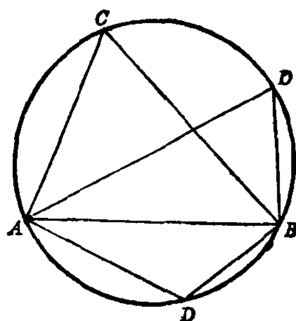


图 14-4

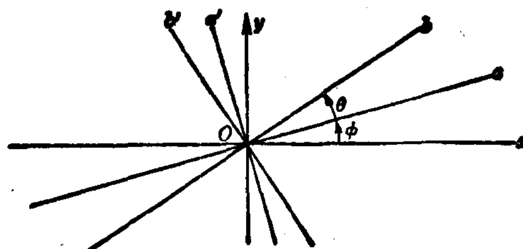


图 14-5

现在我们想从射影几何的角度来考察这些角．为了导出下面要作出的定义，我们给出下面的习题：

已知在原点 O 上的四条直线 a，b，a'，b'，a' 垂直于 a，b' 垂直于 b．设 a 的方程为 $y=mx$，$m=\operatorname{tg}\phi$，并用 θ 记有向角 (ab)．写出 b，a'，b' 的方程，并证明：$(a, b; a', b')$ 只是 θ 的函数．

图 14-6 由一个圆及圆上的四个不同点 A，B，C，D 组成，考虑在点 C 上的直线：$a=AC$，$b=CB$，a' 垂直于 a 且与圆的另一交点为 A'，b' 垂直于 b，与圆的另一交点为 B'(注意 AA' 和 BB' 都是圆的直径)．连接 D 和 A，B，A'，B'，分别得到直线 $\bar{a}$，$\bar{b}$，$\bar{a}'$，$\bar{b}'$，其中 $\bar{a}$ 和 $\bar{a}'$，$\bar{b}$ 和 $\bar{b}'$ 都是垂直的．由定理 8.2 便得：

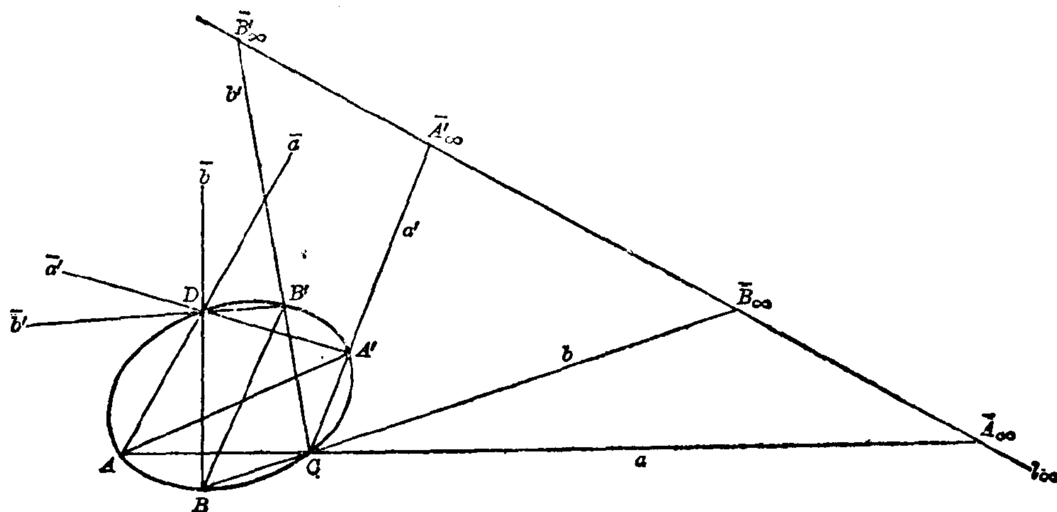


图 14-6

(i) $(a, b, a', b') \barwedge (\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}', \bar{b}')$.

所以，$(ab)=(\bar{a}\bar{b})$就意味着(i)成立．但是反过来，一般是不成立的．因为，引用定理2.10，我们也有

(ii) $(a, b, a', b') \barwedge (\bar{b}, \bar{a}, \bar{b}', \bar{a}')$.

但这并不能推出$(ab)=(\bar{b}\bar{a})$，因为当$(\bar{a}\bar{b})$与$(\bar{b}\bar{a})$互补时，也有$(\bar{a}\bar{b})=(\bar{b}\bar{a})$．注意，在(i)中，还有：$\delta(a, b, a', b')=\delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}', \bar{b}')$，也就是说，它们都是反时针方向．而在(ii)中，我们有：$\delta(a, b, a', b') \neq \delta(\bar{b}, \bar{a}, \bar{b}', \bar{a}')$．现在$(ba)=(\bar{b}\bar{a})$，且显然有：

$$(b, a', b', a) \barwedge (\bar{b}, \bar{a}', \bar{b}', \bar{a})$$

和
$$\delta(b, a', b', a)=\delta(\bar{b}, \bar{a}', \bar{b}', \bar{a}).$$

所以我们规定：

如果直线a, b及它们各自的垂线a', b'在P上，直线c, d及它们各自的垂线c', d'在Q上，且

$$(a, b, a', b') \barwedge (c, d, c', d'),$$
$$\delta(a, b, a', b')=\delta(c, d, c', d')$$

或者
$$(a, b', a', b) \barwedge (c, d', c', d),$$
$$\delta(a, b', a', b)=\delta(c, d', c', d),$$

则有$(ab)=(cd)$.

例 14.1　在图14-7中，直线a, b及它们各自的垂线a', b'都在O上，由于这些直线与l_∞相交于绝对对合$\mathscr{A}$的两对互逆对，故有：

$$(a, b, a', b') \overset{l_\infty}{\barwedge} (\bar{A}_\infty, \bar{B}_\infty, \bar{A}'_\infty, \bar{B}'_\infty) \barwedge (\bar{A}'_\infty, \bar{B}'_\infty, \bar{A}_\infty, \bar{B}_\infty)$$
$$\overset{l_\infty}{\barwedge} (a', b', a, b).$$

因此
$$(a, b, a', b') \barwedge (a', b', a, b),$$
$$\delta(a, b, a', b')=\delta(a', b', a, b),$$

所以(ab)和$(a'b')$相等.

例 14.2　设a, c和b, d是两对平行线，a, b在O上，c, d在另一点O'上，则由于

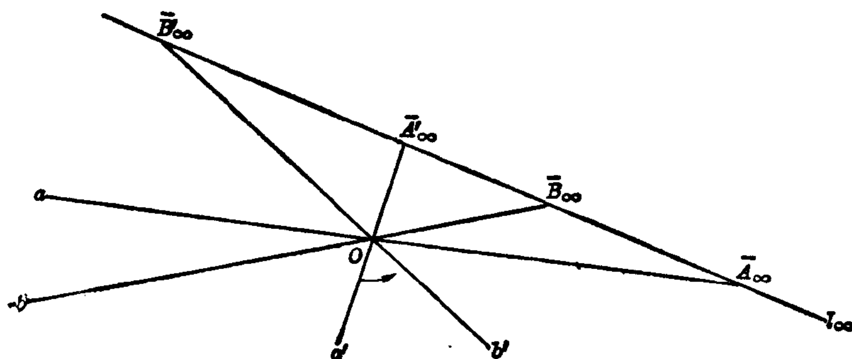


图 14-7

$$(a,\ b,\ a',\ b')\overset{l_\infty}{\barwedge}(\overline{A}_\infty,\ \overline{B}_\infty,\ \overline{A}'_\infty,\ \overline{B}'_\infty)\overset{l_\infty}{\barwedge}(c,\ d,\ c',\ d'),$$
$$(a,\ b,\ a',\ b')\barwedge(c,\ d,\ c',\ d').$$

同样也有 $\delta(a,\ b,\ a',\ b')=\delta(c,\ d,\ c',\ d')$. 这是因为它们都等同于 l_∞ 上的 $\delta(\overline{A}_\infty,\ \overline{B}_\infty,\ \overline{A}'_\infty,\ \overline{B}'_\infty)$, 所以 (ab) 和 (cd) 相等.

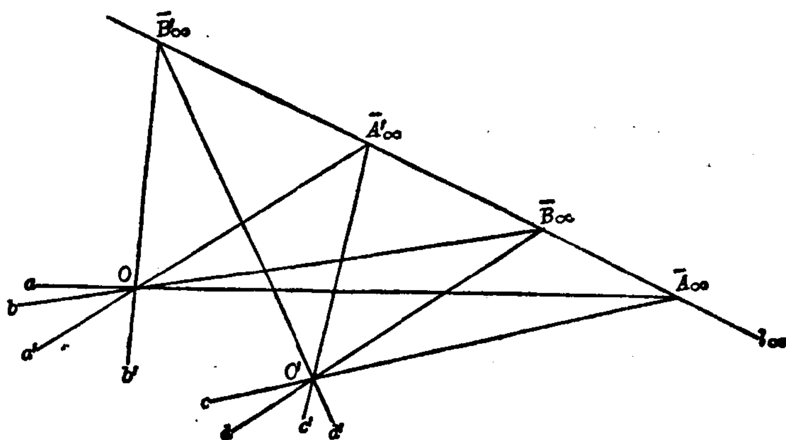


图 14-8

6. 角平分线

若三条共点线 $a,\ b,\ m$ 满足 $(am)=(mb)$, 则说直线 m 平分角 (ab). 设 m 平分 (ab), 则(见图 14-9)我们给出:

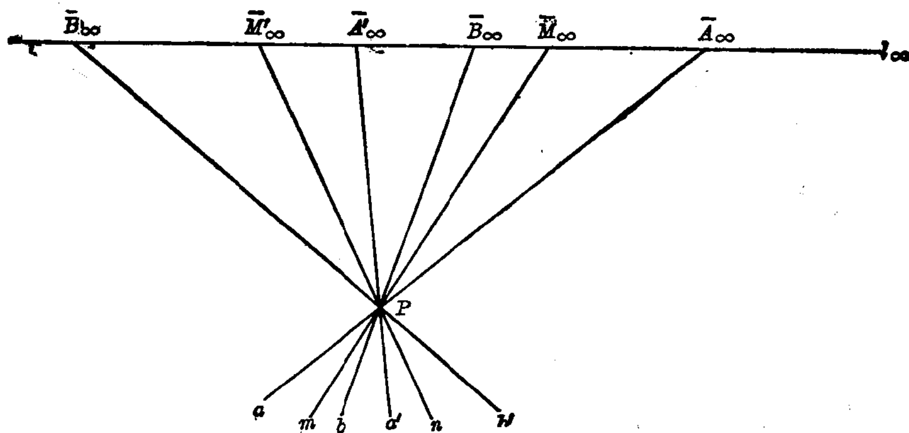


图 14-9

(a) $(a, m, a', n)\barwedge(m, b, n, b')$

和　(b) $\delta(a, m, a', n)=\delta(m, b, n, b')$.

由(a)和定理2.10的对偶,我们得到:

$$(b, n, b', m)\barwedge(m, a', n, a)\barwedge(n, a, m, a')$$

或者
$$(b, n, b', m)\barwedge(n, a, m, a').$$

又由于$\delta(b, n, b', m)=\delta(n, a, m, a')$,所以$(bn)$和$(na)$相等.

又由定理2.10的对偶得:

$$(a, m, a', n)\barwedge(m, b, n, b')\barwedge(b', n, b, m),$$

这表明m, n为对合$(a, a', b, b')\barwedge(b', b, a', a)$的互逆对. 但它们也是圆对合$(a, a', b, b')\barwedge(a', a, b', b)$的互逆对, 根据定理6.13的对偶, 直线$m$, n都是对合$(a, b, a', b')\barwedge(b, a, b', a')$的二重直线;因而$H(m, n; a, b)$. 于是证明了:

定理14.13　若直线m平分角(ab), 则(1)垂直于m的直线n平分角(ba), (2)$H(m, n; a, b)$.

定理14.13的逆也是成立的,即有:

定理14.14　若$H(m, n; a, b)$且m垂直于n,则m平分(ab), (ba)中的一个角, 而n平分另一角.

当m平分(ab), n平分(ba)时,我们称m, n分别为(ab)的*内分角线*和*外分角线*. 下述定理留给读者证明:

定理14.15　斜三角形的高和边平分它的垂足三角形的角.

定理14.16　三角形的分角线三个一组,合在一起构成一个四点形.

7. 二次曲线的轴

考察以O为中心的二次曲线$\mathscr{C}$. 在O上, 有两个有趣的直线对合——$\mathscr{C}$的共轭直径对合和圆对合. 由于后者总是椭圆型的, 所以这两个对合(见定理6.11和6.12)至少有一公共的互逆对(若它们有两对公共互逆对,则它们是恒等的,这时的二次曲线是一个圆). 于是每一椭圆(但不是圆)和双曲线只有一对垂直共轭直径. 故我们定义:

有心二次曲线的*轴*是二次曲线的垂直共轭直径. 或者说, 有心二次曲线的轴是垂直于被它平分的一组平行弦的直径.

椭圆的每一轴都与它相交于两点,叫做*顶点*,*轴长*就是连接两顶点所得线段的长度. 椭圆的各轴长是不相等的,因为要不然, 这椭圆便是圆了. 较长的轴叫做*横轴*(或*长轴*), 另一轴叫*共轭轴*(或*短轴*). 双曲线只有一条轴和它相交(见习题13.32). 这条相交的轴叫做*横轴*,另一条叫做*共轭轴*. 抛物线的轴是一条垂直于被它平分的一组平行弦的直径(为什么只有一条?),抛物线的*顶点*是抛物线与它的轴的普通交点.

为了作出有心二次曲线$\mathscr{C}$的轴, 我们任取一条直径d, 它与二次曲线$\mathscr{C}$相交于A, B两点, 那么以AB为直径的圆或者(a)与$\mathscr{C}$在A和B有公共切线, 或者(b)与$\mathscr{C}$有另外两个交点,比如说D和E. 若有(a), 则直线AB垂直且共轭于这些切线, 因而垂直且共轭于和这些切线平行的弦. 这时, AB就是$\mathscr{C}$的一条轴, 而它的垂直平分线是另一条轴. 若有(b),则点A, B, D, E是一个矩形的顶点. 由定理14.10,矩形的边平行于二次曲线的一对共轭直径,这些共轭直径是垂直的,因而它们就是所求的轴.

当二次曲线是一条与 l_∞ 相交于 O_∞ 的抛物线时，任取一直径 d 和任一垂直于 d 的弦 AB. 设 M 是 AB 的中点；则过 M 的直径就是所求的轴.

8. 二次曲线的焦点和准线

在任一点 P，关于已知二次曲线 $\mathscr{C}$ 的共轭直线的对合含有一对互逆的垂线对. 我们定义：

若一个点关于二次曲线的共轭直线的对合与圆对合重合，则这点称为二次曲线的焦点.

圆的中心就是一个焦点. 但是对于其它类型的二次曲线，都很难直接看出存在这样的点.

现在假设 F 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 的焦点，$\mathscr{C}$ 不是圆，则 $\mathscr{C}$ 在 F 的任一切线都是自共轭的，因而也是自垂直的. 故有：

定理 14.17 二次曲线的焦点总是它的内点.

设 O 是 $\mathscr{C}$ 的中心，当 $\mathscr{C}$ 是抛物线时，$O=O_\infty$，则过 F 且垂直于 OF 的弦共轭于 OF，因而被 OF 平分. 于是 OF 就是 $\mathscr{C}$ 的一条轴，故得：

定理 14.18 二次曲线的焦点在它的轴上.

最后，假设有两个焦点 F 和 F'，则过 F 和 F' 且垂直于 FF' 的直线共轭于 FF'. 由于它们是平行的，因而它们的交点在 l_∞ 上，记为 F_∞. 于是 FF' 是一直径，因而也是轴，这样便证明了：

定理 14.19 若二次曲线有两个焦点 F 和 F'，则 FF' 是二次曲线的轴.

因为除圆以外没有其它二次曲线多于两条轴，而圆只有一个焦点(见习题 14.14)，故我们推得：

定理 14.20 二次曲线的焦点不能多于两个.

剩下的问题是证明除圆以外的二次曲线存在焦点，为此，我们利用与图 14-10 有关的定理 9.13′.

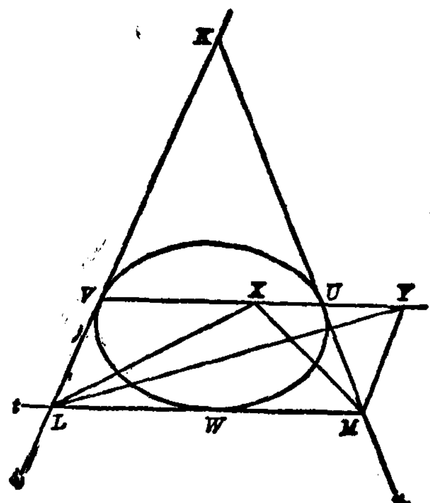


图 14-10

(a) 抛物线. 取 l_∞ 为 u，则 $\mathscr{C}$ 是以 V 为顶点的抛物线，而 v 是抛物线在 V 的切线，t 是另外一条切线. 轴 UV 的极点是 $K=v\cdot l_\infty$；因此，轴上任意一点 X 与 K 都是共轭点对. 由定理 9.13′；直线 $XL=X(t\cdot v)$ 和 $XM=X(t\cdot l_\infty)$ 是共轭线对. 当 XL 垂直于 t 时，XM 垂直于 XL，且 X 为焦点. 至此，除了已证明存在焦点以外，我们还证明了：

定理 14.21 若抛物线的任一切线 t 与抛物线在其顶点的切线相交于 L，则 L 与焦点 F 的连线垂直于 t.

假设有第二个焦点 X'，由定理 14.19 可知，X' 在抛物线的轴上，所以 LX' 垂直于 t，这与定理 14.1 矛盾. 故抛物线只有一个焦点.

(b) 双曲线 取 t 为渐近线，u，v 分别为顶点 U，V 处的切线(注意：$KW=l_\infty$). 那么轴 UV 上的任一点 Y 和 K 是共轭点对，并且，当 LY 垂直于 MY 时，Y 是一个焦点. 让我

们回到平面解析几何中熟悉的双曲线的草图上来，显然，以 LM 为直径的圆与 UV 相交于两点，比如说是 Y_1 和 Y_2. 根据定理 14.6, LY_1 和 MY_1 垂直, LY_2 和 MY_2 垂直，因此，Y_1 和 Y_2 都是焦点.

(c) 椭圆 取 u, v 为长轴端点 U 和 V 处的切线, t 为短轴一端的切线. 则仿照(b)便可以得出结论，即以 LM 为直径的圆与 UV 相交于 X_1 和 X_2，它们就是所求的焦点.

二次曲线的焦点的极线叫做相应于这焦点的二次曲线的准线. 于是，抛物线的准线垂直于抛物线的轴. 有心二次曲线(除圆以外)的准线都垂直于二次曲线的横轴.

我们再叙述一些定理来结束这一章对二次曲线的简短研究，其中有些定理对读者来说是新接触到的.

定理 14.22 抛物线的相互垂直的切线交在准线上(证明见习题 14.3).

定理 14.23 若抛物线的两切线垂直，则它们的切点连线过焦点.

定理 14.24 抛物线的切线上介于准线和切点之间的线段 AP 对着顶点在焦点的直角.

定理 14.25 外切于抛物线之三角形垂心在抛物线的准线上(证明见习题 14.4).

定理 14.26 二次曲线的焦点与任意两条切线交点的连线和焦点与切点的连线组成相等的角.

§14.2 问题及其解

14.1 证明：三角形的高线共点.

证明：若三角形是直角三角形，此定理显然成立. 现假定是斜三角形，见图 14-11.

令 $PQ\cdot l_\infty=\bar{A}_\infty$, $QR\cdot l_\infty=\bar{B}_\infty$, $RP\cdot l_\infty=\bar{C}_\infty$, 则过 P 的 QR 的垂线和过 R 的 PQ 的垂线分别交 l_∞ 于 $\bar{B}'_\infty$ 和 $\bar{A}'_\infty$. 令 $P\bar{B}'_\infty\cdot R\bar{A}'_\infty=S$, 由定理 6.3, 完全四点形 $PQRS$ 的边交 l_∞ 于一个对合中的三组互逆对，把这个对合称为 $\mathscr{J}$，由作图，其中的两对是对合 $\mathscr{A}$ 中的互逆对，由定理 6.2 可知 $\mathscr{J}=\mathscr{A}$. 于是由于 SQ 在 $\bar{C}'_\infty$ 上，它与 PR 垂直.

14.2 设 P, R 是不同点, O 是 RP 的垂直平分线 p 上的任一点. 证明：存在唯一一个圆，它以 O 为中心, PR 为弦.

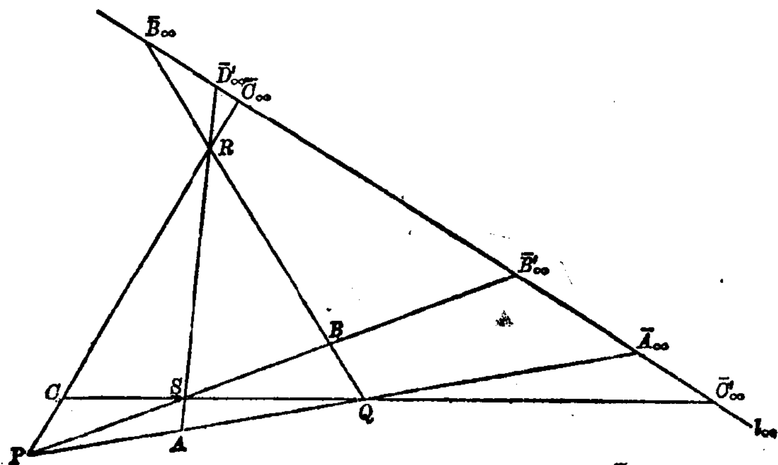


图 14-11

证明：设 $p\cdot PR=C$，若 $O=C$，则此题显然成立．假定 O 不在 PR 上(如图 14-12 所示)．记在 P 上且以 O 为中心的唯一的圆为 $\mathscr{C}$(为了作这个圆，令 $OP\cdot l_\infty=\bar{P}_\infty$，作出 Q 使得 $H(O,\bar{P}_\infty,P,Q)$ 成立，步骤如前)．若 $\mathscr{C}$ 在 R 上，则问题已解决．现假定 $\mathscr{C}$ 再交 PR 于 $R'\neq R$．由定理 14.7，O(在 p 上)也在 PR' 的垂直平分线上，但 $H(R,P;C,A_\infty)$，$H(R',P;C,A_\infty)$．所以 $R'=R$，且 $\mathscr{C}$ 以 PR 为其一弦．

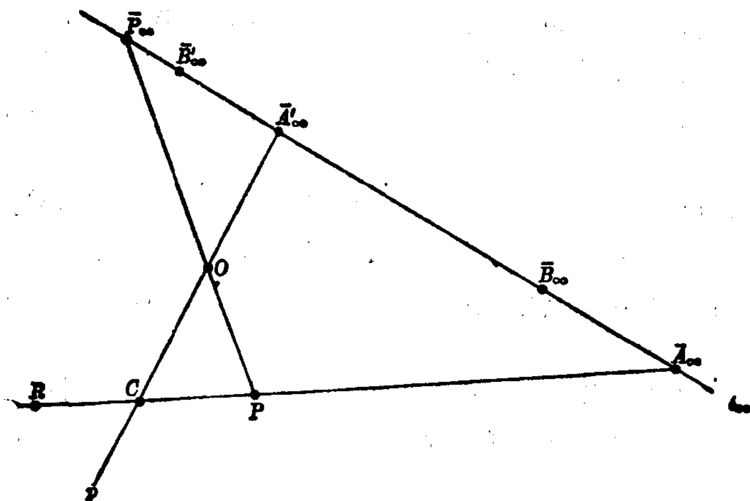


图　14-12

14.3　证明：抛物线的互相垂直的切线交在准线上．

证明：设抛物线的一对互相垂直的切线 a，a'，交于 A，且分别交顶点处的切线于 B 和 B'．若 F 为抛物线的焦点，那么由定理 14.21，FB 垂直于 a，FB' 垂直于 a'．于是，四点形 $ABFB'$ 是矩形；FB，FB' 是在 F 上的一对垂线．因而是关于抛物线的一对共轭线．由定理 9.14'，点 A 共轭于 F，所以在准线上．

14.4　证明：外切于抛物线的三角形的垂心在准线上．

证明：设 p，q，r 是外切三角形的边，p'，q'，r' 分别是垂直于 p，q，r 的抛物线的切线．考虑六边形 $pqrr'l_\infty p'$；由布利安桑定理有：$(p\cdot q)(r'\cdot l_\infty)$，$(q\cdot r)(l_\infty\cdot p')$，$(r\cdot r')(p'\cdot p)$共点，其中前面两条直线(三角形的高线)交于三角形的垂心 S．第三条线是抛物线的准线，所以 S 在准线上．

§14.3　补　充　题

14.5　证明：已知斜三角形的垂心和它的一个顶点的连线，以及垂心和在该顶点对边上的理想点的连线是在垂心上的圆对合中的互逆对．

14.6　已知斜三角形 PQR 及其垂心 S，证明：

(a) 点 P，Q，R 分别是三角形 QRS，PRS，PQS 的垂心．

(b) 每个三角形 PQR，QRS，PQS 的垂足三角形是四点形 $PQRS$ 的对角三角形．

14.7　证明：三角形各边的垂直平分线共点．这个点称为三角形的外心．

提示：设三角形各边 PQ，QR，RP 的中点分别是 D，E，F，三角形 PQR 的垂直平分线是它的中点三角形 DEF 的高线．

14.8 证明：定理 14.6—14.11.

14.9 在图 14-13 中，已知一圆及其圆心 O，一内接三角形 ABC，和在 A 点的切线 t，证明：$(bt)=(ac)$.

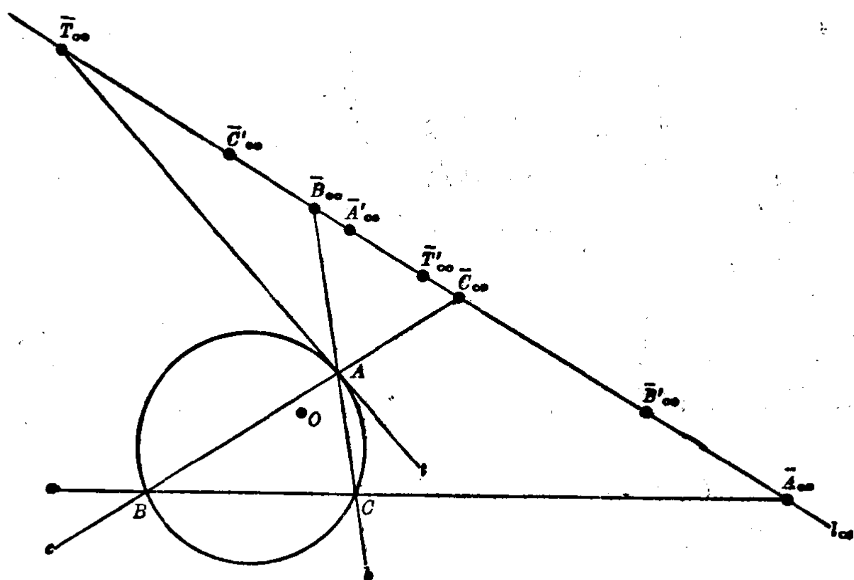


图 14-13

14.10 证明：任一点 P 关于一个圆的极线垂直于在 P 上的直径.

14.11 证明：关于一个圆的任一自配极三角形的垂心与圆心重合.

14.12 证明：定理 14.14, 14.15, 14.16.

14.13 在图 14-11 中，分别确定 PQ 和 QR 的中心 D 和 E. 证明三角形 $RD\overline{A}'_\infty$ 和 $PE\overline{B}'_\infty$ 是通过一点的透视. 推出三角形 PQR 的垂心 G，外心 O 和垂心 S 共线，此线称为三角形的欧拉线.

14.14 设 $\mathscr{C}$ 为一圆，O 是其中心，A 是另一内点；p 为 A 上一直线，P 是 p 关于 $\mathscr{C}$ 的极点. 证明：一般地，共轭线对 p 和 AP 不垂直，所以 A 决不是 $\mathscr{C}$ 的焦点.

14.15 已知两圆 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$，中心分别为 O 和 O'，$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 交于 P 和 Q，证明：

(a) 在 P 和 Q 处的 $\mathscr{C}(\mathscr{C}')$ 的切线交在连心线 $c=OO'$ 上.

(b) 若在 P 点两条切线垂直，则它们分别在中心 O 和 O' 上，在 Q 处的切线也如此.

14.16 若两相交圆在公共点处的切线垂直，则此两圆称为正交的；若在习题 14.15 中的圆是正交的，证明：$\mathscr{C}(\mathscr{C}')$ 的任一直径 DD' 交 $\mathscr{C}'(\mathscr{C})$ 于 R, S，且 $H(D, D'; R, S)$，则 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 正交.

14.17 证明：若 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 是交于 P, Q 的两圆，在 $\mathscr{C}$ 的中心上的直线 d 交 $\mathscr{C}$ 于 D, D'，交 $\mathscr{C}'$ 于 R, S，且 $H(D, D'; R, S)$，则 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 正交.

14.18 证明：若 S 是三角形 PQR 的垂心，则以两个顶点的连结线段为直径的圆 $\mathscr{C}$ 和以 S 及第三个顶点的连结线段为直径的圆 $\mathscr{C}'$ 正交.

14.19 证明定理 14.23, 14.24, 14.26.

提示：对于定理 14.26，设 F 是焦点，d 是相伴的准线；t, t' 是交于 U 的切线；T, T' 是各自的切点，$TT'\cdot d=K$，则 K 是 FU 的极点.

14.20 若双曲线的渐近线交 l_∞ 于绝对对合中的互逆对，则这双曲线称为等轴双曲线.

每对互相垂直的直线可看成为退化的等轴双曲线. 证明:

(a) 在四个普通点上的二次曲线束中包含一条等轴双曲线.

(b) 若在四个已知点上的二次曲线束中包含两条等轴双曲线(包括退化情况), 则束中每条曲线都是等轴双曲线.

(c) 在两条等轴双曲线的四个交点上的每条二次曲线都是等轴双曲线.

(d) 在一个斜三角形的顶点和垂心上的每条二次曲线是等轴双曲线.

(e) 若等轴双曲线在三角形 PQR 的顶点上, 则它也在三角形的垂心 S 上.

提示: 设过 P 点的 QR 的垂线交双曲线于 T.

14.21 (a) 证明: 若一个四点形的顶点是斜三角形 PQR 的顶点及其垂心 S, 则四点形关于 l_∞ 的九点二次曲线(见习题 13.37)在三角形的各边中点、三角形高线的垂足、三角形垂心和各顶点的连结线段的中点上.

(b) 证明: 这个二次曲线是一个圆, 这个圆称为三角形 PQR 的**九点圆**或**费尔巴赫圆**.

提示: 若 D, E, F, T, U, V 分别是 PQ, QR, RP, PS, QS, RS 的中点, 则 $DUVF$ 和 $TDEV$ 是以 DV 为公共对角线的矩形.

第十五章　解析射影几何

§15.1 基 本 内 容

1. 引　　言

在第一章里，我们注意到希腊人曾经用几何来解释算术和代数．有趣的是，现在完全倒过来了，现代的趋势是用代数的方法来解决几何问题．这一章以及下两章我们研究平面射影几何的一些代数方法．

我们在第七章中知道，把有序三元数组定义为点，把含有三个变量的线性方程定义为直线，能建立某些有限射影几何的模型，在每一种情况下，三元数组的分量和线性方程的系数都是某有限集的元素．以下除了我们所碰到的数集是全体实数集外，都按熟悉的方式进行．

2. 定　　义

我们开始用代数术语来定义平面几何的基本要素：点、直线和"在上"关系．这时，最基本的是要记住，在我们的几何里，点和直线是对偶元素．

三元有序实数组$(x_1, x_2, x_3)\neq(0, 0, 0)$是一个点，并约定：当$\lambda\neq 0$时，$(x_1, x_2, x_3)$和$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$是同一点．

三元有序实数组$[x_1, x_2, x_3]\neq[0, 0, 0]$是一条直线，并约定当$\lambda\neq 0$时$[X_1, X_2, X_3]$和$[\lambda X_1, \lambda X_2, \lambda X_3]$是同一条直线．

于是$(1, 2, 3)$是一个点，而$[1, 2, 3]$是一条直线．

若
$$\{Xx\}=\{xX\}=x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3=0, \tag{1}$$
则说点X：(x_1, x_2, x_3)在直线x：$[X_1, X_2, X_3]$上，或者说，直线$[X_1, X_2, X_3]$在点(x_1, x_2, x_3)上．

例 15.1　(a) $(6, 8, -10)$，$(3, 4, -5)$，$\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$为同一点．

(b) $[2, 1, 2]$，$[6, 3, 6]$，$\left[-1, -\frac{1}{2}, -1\right]$为同一直线．

(c) 点P：$(3, 4, -5)$在直线p：$[2, 1, 2]$上，因为$x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3=3\times 2+4\times 1+(-5)\times 2=0$．

诸数x_1, x_2, x_3叫做点(x_1, x_2, x_3)的坐标；诸数X_1, X_2, X_3叫做直线$[X_1, X_2, X_3]$的坐标．当(x_1, x_2, x_3)为定直线$[X_1, X_2, X_3]$上的变点时，(1)式可写为：
$$X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3=0$$
并称它为直线方程．当$[X_1, X_2, X_3]$为定点(x_1, x_2, x_3)上的变直线时，
$$x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3=0$$

叫做点的方程.

例 **15.2** (a) 直线 [1, 2, 3] 的方程是 $x_1+2x_2+3x_3=0$; 直线 $2x_1-4x_2+5x_3=0$ 的坐标是[2, −4, 5].

(b) 点(2, −1, 0)的方程为 $2X_1-X_2=0$; 点 $X_1-X_3=0$ 的坐标为(1, 0, −1).

显然,只要同时作下述两种互换,我们基本上可得到任何讨论的对偶.

(i) 小写字母和大写字母.

(ii) 圆括号和方括号.

在熟知的笛卡儿坐标系里,每一数对(x, y)确定平面上唯一一个点,反之,平面上每一点都被唯一数对确定,反之,每一线性方程 $ax+by+c=0$(a, b 不同时为 0)确定唯一一条直线,当 $\lambda\neq 0$ 时,$\lambda ax+\lambda by+\lambda c=0$ 这一族线性方程代表同一条直线,而 $ax+by+c=0$ 只是这一族中的一个代表. 在解析几何这一章以下的讨论中,点和直线都具有多种表示. 但是,为了简洁起见,我们仿照例 15.2 那样,“坐标”和“方程”是指表示点和直线的一族方程中的某一坐标和方程.

当然,我们期望把点和直线表为三元实数组的解析几何将提供我们在前些章里研究的实综合几何的一个模型. 我们在这一章的例题和习题解答中将验证第七章的一些公理,而其余公理的验证则留给读者去完成.

3. 共线点和共点线

设Y: $(y)=(y_1, y_2, y_3)$, Z: $(z)=(z_1, z_2, z_3)$为已知的两个点. 按定义,Y 有无限多个表示方法: $\alpha(y)=(\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3)$,这里 α 为非零实数,Z 也是这样,假设我们在这些表示法中发现:

$$\alpha(y)=(\alpha y_1,\ \alpha y_2,\ \alpha y_3)=(\beta z_1,\ \beta z_2,\ \beta z_3)=\beta(z), \tag{2}$$

则 Y, Z 便是同一点,而且,若令 $\lambda=\alpha$, $\mu=-\beta$, 则它们代表同一点的条件是存在非零实数 λ, μ, 使得

$$\lambda(y)+\mu(z)=(0,\ 0,\ 0). \tag{3}$$

如果关系式(3)不存在,则 Y 和 Z 是两个不同点.

下面我们考虑三个不同点 Y: (y), Z: (z), W: (w). 假使在它们的表示中我们发现: $\alpha(y)$, $\beta(z)$, $\gamma(w)$满足

$$\alpha(y)+\beta(z)+\gamma(w)=(0,\ 0,\ 0), \tag{4}$$

即:

$$\begin{aligned}\alpha y_1+\beta z_1+\gamma w_1=0,\\ \alpha y_2+\beta z_2+\gamma w_2=0,\\ \alpha y_3+\beta z_3+\gamma w_3=0.\end{aligned} \tag{5}$$

虽然(5)总是有零解 $\alpha=\beta=\gamma=0$, 但由代数定理和线性方程组有非平凡解的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & w_1 \\ y_2 & z_2 & w_2 \\ y_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

从而有:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

(7)式保证了必定存在不全为零的数 X_1, X_2, X_3 满足

$$X_1y_1+X_2y_2+X_3y_3=0,$$
$$X_1z_1+X_2z_2+X_3z_3=0,$$
$$X_1w_1+X_2w_2+X_3w_3=0.$$

但这些就是点(y), (z), (w)在直线$[X_1, X_2, X_3]$上的条件. 于是有:

定理 15.1 三个不同点(y), (z), (w)共线的充要条件是:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

由此又得

定理 15.2 由不同两点(y), (z)确定的直线方程是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_3 = 0,$$

其坐标是
$$\left[\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\right].$$

例 15.3 (a) 点 P: (2, 1, −3), Q: (4, −2, 4), R: (10, −1, 0)是三个不同点(试验证之)并且共线. 因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -3 \\ -16 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(b) 点 P 和 Q 的连线方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} x_3$$

$$= -2x_1-20x_2-8x_3=0.$$

另一表示为: $$x_1+10x_2+4x_3=0.$$

反之,若关系式(4)不成立,则点 Y, Z, W 不共线.

最后,考虑平面上的任意四点 Y: (y), Z: (z), U: (u), W: (w). 我们要证明: 总存在不全为零的实数 α, β, γ, δ, 使得

$$\alpha(y)+\beta(z)+\gamma(u)+\delta(w)=(0, 0, 0)=0. \tag{8}$$

假定其中某二点(比如说 Y 和 Z)是同一点, 则对于 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, $\gamma=\delta=0$, (8)式成立. 其次假定其中任意两点都不同且 Y, Z, U 共线; 则对于 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, $\gamma\neq0$, $\delta=0$ (8)式成立.

最后,假定任意三点都不共线,则因

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & u_1 \\ y_2 & z_2 & u_2 \\ y_3 & z_3 & u_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故方程组

$$\alpha y_1+\beta z_1+\gamma u_1=-\delta w_1,$$
$$\alpha y_2+\beta z_2+\gamma u_2=-\delta w_2,$$
$$\alpha y_3+\beta z_3+\gamma u_3=-\delta w_3$$

对于任意 $\delta\neq 0$，都有唯一一组解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$，所以(8)式成立。

对偶地，若存在非零实数 $\lambda,\ \mu$，使得

$$\lambda[Y]+\mu[Z]=[0,\ 0,\ 0]=0, \tag{3'}$$

则两线 y: $[Y]$和 z: $[Z]$是同一直线．又若存在非零实数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 使得：

$$\alpha[Y]+\beta[Z]+\gamma[W]=0, \tag{4'}$$

则三条不同直线 y: $[Y]$，z: $[Z]$，w: $[W]$共点．

下述定理留给读者证明：

定理 15.1′ 三条不同直线$[Y]$，$[Z]$，$[W]$共点的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix}=0.$$

定理 15.2′ 由不同的直线$[Y]$和$[Z]$确定的点的方程是

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}X_1+\begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix}X_2+\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}X_3=0,$$

其坐标为 $\left(\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}\right)$．(见习题 15.1)

4. 点列和线束

在习题 15.2 中，我们将证明：

定理 15.3 若(y)和(z)是两个不同点，则$\lambda(y)+\mu(z)=(\lambda y+\mu z)$($\lambda,\ \mu$ 是两个任意非零实数)是(y)和(z)所确定的直线上的另一点．

设(y)，(z)，$(\lambda y+\mu z)$是三个不同的共线点，因为 $\lambda\neq 0$，$(\lambda y+\mu z)$和$\left(y+\frac{\mu}{\lambda}z\right)=(y+\nu z)$是同一点．考虑$(y+\nu z)=(y)+\nu(z)$，其中$(y)$和$(z)$固定，$\nu$ 为实参数．当 $\nu=0$ 时，$(y+\nu z)$就是点(y)；当 $\nu\neq 0$ 时，$(y+\nu z)$是一个不同于(y)，(z)的点；当 $\nu_1\neq\nu_2$ 和 $\nu_1\cdot\nu_2\neq 0$ 时，点(y)，(z)，$(y+\nu_1 z)$，$(y+\nu_2 z)$是四个不同的共线点．此外，若 $W\neq Z$ 在直线 YZ 上，则由(6)式推得：对于 ν 的某一实值，有$(w)=(y)+\nu(z)$．我们约定：当 $\nu=\infty$ 时，$(y+\nu z)=(z)$．于是有：

定理 15.4 设(y)和(z)是两个不同点，则当 ν 在扩大了的实数系(即所有的实数集合再加上 ∞)上变化时，$(y+\nu z)$确定(y)，(z)所在直线上的点列．

对偶地，我们有：

定理 15.3′ 设$[Y]$和$[Z]$是两条不同直线，则 $\lambda Y+\mu Z$ 是$[Y]$和$[Z]$所在点上的另一

直线(λ, μ 是任意两个非零实数).

定理 15.4′ 设$[Y]$和$[Z]$是两条不同直线, 则当ν在扩大实数系上变化时, $[Y+\nu Z]$确定$[Y]$, $[Z]$所在点上的线束.

例 15.4 (a) 确定点(3, 1, −2)和(1, −5, 3)的连线r与直线s: $2x_1-3x_2-4x_3=0$的交点T. (b)求在点R: (1, 2, −2)及直线: $2x_1-3x_2-7x_3=0$, $5x_1+2x_2=0$的交点上的直线p的方程.

(a) 由于T在r上, 故对于λ的某一值, 有T: $(3+\lambda,\ 1-5\lambda,\ -2+3\lambda)$. 又由于$T$在$s$上, 故$2(3+\lambda)-3(1-5\lambda)-4(-2+3\lambda)=11+5\lambda=0$, 所以, $\lambda=-11/5$. 于是

$$T:\ (3-11/5,\ 1+11,\ -2-33/5)=(4/5,\ 12,\ -43/5).$$

或
$$T:\ (4,\ 60,\ -43).$$

这个习题也可以通过写出r的方程, 并与s的方程联立来求解.

(b) 任一与这两已知直线共点的直线方程都具有形式: $(2+5\lambda)x_1+(-3+2\lambda)x_2+7x_3=0$, 因为$R$在所求的直线上, 所以

$$(2+5\lambda)\cdot1+(-3+2\lambda)\cdot2+7\cdot(-2)=-18+9\lambda=0,$$
$$\therefore\quad \lambda=2.$$

于是, $(2+5\cdot2)x_1+(-3+2\cdot2)x_2+7x_3=12x_1+x_2+7x_3=0$便是$p$的方程(也可以参看习题15.3).

5. 解析证明

现在我们考虑在一条直线上的不同点. 由定理13.5, 我们可以取(y), (z), $\lambda(y)+\mu(z)$为直线上的任意三点. 当需要更多的点时, 就简单地取它们为(y), (z), $(y)+\alpha(z)$, $(y)+\beta(z)$, …, $(y)+\theta(z)$. 若需要三个点, 则可以进一步简化. 考虑点集: P: (y), Q: (z), R: $(w)=\lambda(y)+\mu(z)$, 则$\lambda(y)=(\lambda y)$是点P的另一表示, (μz)是Q的另一表示. 于是, 对于P和Q总可以选择新的表示$(y^*)=(\lambda y)$和$(z^*)=(\mu z)$, 使得

$$(w)=(y^*)+(z^*).$$

若令$(w^*)=(-w)$, 则

$$(y^*)+(z^*)+(w^*)=(0,\ 0,\ 0)=0.$$

这正适合我们的要求.

例 15.15 已知例15.3的共线点P: $(y)=(2,\ 1,\ -3)$, Q: $(z)=(4,\ -2,\ 4)$, $R(w)=(10,\ -1,\ 0)$, 选择P, Q的表示(y^*), (z^*), 使得R: $(y^*)+(z^*)$.

令$\lambda(y)+\mu(z)=(w)$, 解方程组

$$\begin{cases}2\lambda+4\mu=10,\\ \lambda-2\mu=-1,\\ -3\lambda+4\mu=0,\end{cases}$$

得$\lambda=2$, $\mu=3/2$. 于是$(y^*)=(2y)=(4,\ 2,\ -6)$, $(z^*)=(3z/2)=(6,\ -3,\ 6)$为所求的表示.

这样我们在讨论时也可以假设共线点P: (y), Q: (z), R: (w)的坐标满足

(i) $(w)=(y)+(z)=(y+z)$

或 (ii) $(y)+(z)+(w)=(0,\ 0,\ 0)=0$.

类似地，若 P, Q, R, S 是四个点(任意三点都不共线)，则由(8)推知，可以分别选取 $(y), (z), (u), (w)$ 的表示，使得

(iii) $(y)+(z)+(u)+(w)=(0, 0, 0)=0$

或 (iv) $(w)=(y)+(z)+(u)$.

我们可由(i)～(iv)的对偶得到关于直线的一些命题.

例 15.6 已知三角形 ABC 和不在任一边上的点 P. 设 $AP\cdot BC=A'$, $BP\cdot CA=B'$, $CP\cdot AB=C'$, $BC\cdot B'C'=A''$, $CA\cdot C'A'=B''$, $AB\cdot A'B'=C''$. 证明 A'', B'', C'' 共线.

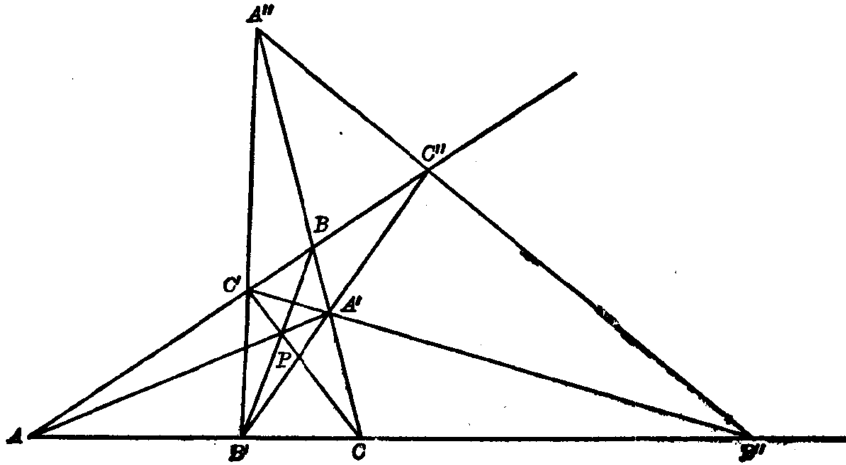


图 15-1

取 A: (a), B: (b), C: (c) 三点，使得 P: $(a+b+c)$; 则 A': $(b+c)$, B': $(c+a)$, C': $(a+b)$. 由于 A'' 在 BC 上，故它的坐标具有 $\lambda(b)+\mu(c)$ 的形式；而 A'' 又在 $B'C'$ 上，所以我们只能有：A'': $(b-c)$. 同理，B'': $(c-a)$, C'': $(a-b)$. 于是由

$$\begin{vmatrix} A'' \\ B'' \\ C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix} = 0$$

或 $A''+B''+C''=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$ 推出 A'', B'', C'' 共线.

在习题 15.4 中，我们要验证第七6.章中的公理 6(笛沙格双三角形定理). 在习题 15.5 中，我们给出它的另一个证明，并且在习题 15.6 中，我们研究多重透视三角形（见习题 3.34).

我们在习题 15.7 中，将验证第七章 6. 中的公理 7. 在习题 15.8 中，将证明：

定理 15.5 点 D: $(a)+\lambda(b)$ 关于 $A(a)$ 和 $B(b)$ 的调和共轭点是 E: $(a)-\lambda(b)$

对偶地，我们有：

定理 15.5′ 直线 d: $[A]+\lambda[B]$ 关于直线 a: $[A]$ 和 b: $[B]$ 的调和共轭线是直线 e: $[A]-\lambda[B]$.

例 15.7 已知共线点 A: $(a)=(1, 2, 3)$, B: $(b)=(2, -1, -2)$, C: $(c)=(8, 1, 0)$, 找出 C 关于 A 和 B 的调和共轭点 D.

如果 C 表为 $(a)+\lambda(b)$，则由定理 15.5 知，D 可表为 $(a)-\lambda(b)$. 令 $(c)=\alpha(a)+\beta(b)$，解方程组：

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=8,\\ 2\alpha-\beta=1, \quad 得\ \alpha=2,\ \beta=3.\\ 3\alpha-2\beta=0,\end{cases}$$

则 C: $(a)+\frac{\beta}{\alpha}(b)=(a)+\frac{3}{2}(b)$, D: $(a)-\frac{3}{2}(b)=\left(-2,\ \frac{7}{2},\ 6\right)$. 它的另一表示是 D: $(-4, 7, 12)$.

6. 交　比

在由 A: (a)和 B: (b)所确定的直线上，取四个点 P: $(a)+\alpha(b)$, Q: $(a)+\beta(b)$, R: $(a)+\gamma(b)$, S: $(a)+\delta(b)$. 我们用参数 α, β, γ, δ 定义这些点的交比为:

$$(P, Q; R, S)=(\alpha, \beta; \gamma, \delta)=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}. \tag{9}$$

上述(9)式和第二章中的第(5)式在形式上没有本质的不同. 因为，若 A, B, C, D 到直线的定点 O 的距离各为 a, b, c, d, 则(5)变成:

$$(A, B, C, D)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}.$$

因此，定理 2.2～2.5 在这里可以不加修改地成立. 此外，当点 P, Q, R 固定而 $S\to B$ (即 $\delta\to\infty$)时，我们得到:

$$(P, Q, R, B)=\frac{(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)}.$$

最后，若 $R=A$, $S=B$, P: $(a)+\alpha(b)$, Q: $(a)-\alpha(b)$ (即由习题 15.8 $H(P, Q; A, B)$, 则$(P, Q; A, B)=-1$.

7. 射　影

第七章 6. 中的基本定理等价于:

两点列之间的射影由三对不同的对应点完全确定.

现在我们来验证这一点.

我们从原始的射影——即在点 P 的线束和任一不在 P 上的直线 p 截此线束所得的点列之间的基本透视着手. 由 5. 段(i)的对偶，我们可以选取 P 上的任意三条直线 q, r, s, 并选择它们的表示，使得: q: $[Y]$, r: $[Z]$, s: $[Y+Z]$. 设 $p\cdot q=Q$, $p\cdot r=R$, $p\cdot s=S$. 由于 Q, R, S 共线，所以我们可以选取它们的表示(参看(i))使得: Q: (y), R: (z), S: $(y+z)$. 于是有:

Q 在 q 上从而$\{Yy\}=0$,

R 在 r 上从而$\{Zz\}=0$,

S 在 s 上从而$\{(Y+Z)(y+z)\}=\{Yy\}+\{Zz\}+\{Yz\}+\{Zy\}=\{Yz\}+\{Zy\}=0$.

又设 t: $[Y+\lambda Z]$是 P 上的另一直线，我们需要证明 $p\cdot t=T$: $(y+\lambda z)$, 这可由$\{(Y+\lambda Z)(y+\lambda z)\}=\{Yy\}+\lambda(\{Yz\}+\{Zy\})+\lambda^2\{Zz\}=0$ 推出.

现在把不在 p 上的点 $W\neq P$ 和点 Q, R, S 相连，并用不在 W 上的直线 w 与这些连线相截各得点 (y'), (z'), $(y'+z')$. 则 p 上的任意其它点 $(y+\lambda z)$ 和 W 的连线与 w 相交于 $(y'+\lambda z')$ (这一点留给读者自己去证明). 于是, (y), (z), $(y+z)$, $(y+\lambda z)\,\overline{\wedge}\,(y')$, (z'),

$(y'+z')$, $(y'+\lambda z')$.

而且显然另一射影和截影得到

$$(y),\ (z),\ (y+z),\ (y+\lambda z)\barwedge(y''),\ (z''),\ (y''+z''),\ (y''+\lambda z''),$$

从而(y'), (z'), $(y'+z')$, $(y'+\lambda z')\barwedge(y'')$, (z''), $(y''+z'')$, $(y''+\lambda z'')$.

从以上讨论易知，在不同直线或同一直线上的两点列之间的射影$(A, B, C, D, \cdots)\barwedge(A', B', C', D', \cdots)$，总能经过适当的排列，使得由$A$, B确定的任意一点P的参数和由A', B'确定的P的对应点P'的参数相同．简单地说，射影保持参数不变．于是可推得射影保持交比不变；即由

$$(P, Q, R, S)\barwedge(P', Q', R', S'),$$

必有

$$(P, Q; R, S)=(P', Q'; R', S').$$

反过来，假设$(P, Q; R, S)=(P', Q'; R', S')$．我们总可以选取表示$R$: (r), S: (s)，使得Q: $(r+s)$和R': (r'), S': (s')使得Q': $(r'+s')$．设P: $(r+\lambda s)$，因为$(P, Q; R, S)=(\lambda, 1; 0, \infty)=\lambda$，所以$(P', Q'; R', S')=\lambda$, P': $(r'+\lambda s')$．于是P, Q, R, S和P', Q', R', S'之间的对应是一个射影，因而有：

若$(P, Q; R, S)=(P', Q'; R', S')$，则$(P, Q, R, S)\barwedge(P', Q', R', S')$.

8. 分　隔

设A: (a), B: (b), D: $(a+\lambda b)$, E: $(a+\mu b)$是直线上的四个不同点．我们定义：

当且仅当$\lambda/\mu<0$时，称点对D, E分隔点对A, B.

第七章6．中的公理8和公理9现在立刻可以验证．

至于公理10，我们考虑不同的共线点A: (a), B: (b), D: $(a+\lambda b)$, E_1: $(a+\mu b)$, E_2: $(a+\nu b)$．令：

（i）D, E_1分隔A, B，从而$\lambda/\mu<0$，

（ii）B, E_2分隔A, E_1.

对于(ii)，我们有必要把B, E_2的坐标表示为A和E_1的坐标的线性组合．

我们求得

$$B:\ (a-1(a+\mu b)),$$

$$E_2:\ \left(a+\frac{\nu}{\mu-\nu}(a+\mu b)\right),$$

所以

$$(\nu-\mu)/\nu<0.$$

还需要证明D, E_2分隔A, B；即$\lambda/\nu<0$．因若$\lambda/\mu<0$，则或者$\lambda>0$, $\mu<0$，或者$\lambda<0$, $\mu>0$．假定$\lambda>0$, $\mu<0$，则由$(\nu-\mu)/\nu<0$，可得$\nu<0$, $|\nu|<|\mu|$．所以$\lambda/\nu<0$．假定$\lambda<0$, $\mu>0$，则由$(\nu-\mu)/\nu<0$可得$\nu>0$, $\nu<\mu$，所以$\lambda/\nu<0$．这就验证了公理10.

§15.2　问题及其解

15.1　已知直线p: $3x_1-3x_2-x_3=0$,

q: $7x_1-11x_2-5x_3=0$,

r: $10x_1-11x_2-4x_3=0$,

(a) 证明它们共点. (b) 求出交点.

(a) 解：∵ $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 7 & -11 & -5 \\ 10 & -11 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$

∴ 三线共点.

(b) 解一：$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 7 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 4X_1 + 8X_2 - 12X_3 = 0.$

交点为：(4, 8, −12)或(1, 2, −3).

解二：在 q, r 的方程中消去 x_2, 可得

$$3x_1 + x_3 = 0, \quad 取 \quad x_1 = 1,\ x_3 = -3,$$

则 $x_2 = 2$.

∴ 所求点为 (1, 2, −3).

15.2 证明：若(y), (z)为不同点，则$\lambda(y)+\mu(z)$ $(\lambda,\ \mu\neq 0)$是由(y), (z)确定的直线上的另一点.

证明：假设
$$\lambda(y)+\mu(z)=\nu(y),$$
则
$$\mu(z)=\nu(y)-\lambda(y)=(\nu-\lambda)(y).$$
所以 $\mu(z)$和$(\nu-\lambda)(y)$表示同一点，与假设(y), (z)为不同点矛盾.

同理，$\lambda(y)+\mu(z)\neq\nu(z)$，于是$(y)$, (z)和$\lambda(y)+\mu(z)$为不同点.

因为
$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \lambda y_1+\mu z_1 & \lambda y_2+\mu z_2 & \lambda y_3+\mu z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

所以这三点共线.

15.3 证明：点 P: (y)和直线 r: $[Z]$ s: $[W]$的交点 Q 在直线 t: $[\{Wy\}Z-\{Zy\}W]$ 上.

证明：若 r 或 s 在 P 上，此题显然成立. 假设 r, s 都不在 P 上，则 t 是 $r\cdot s$ 上的第三条直线.

取 t: $[Z]+\lambda[W]=[Z+\lambda W]$, $(\lambda\neq 0)$. 若 $\{[Z+\lambda W]y\}=\{Zy\}+\lambda\{Wy\}=0$ 或 $\lambda=-\dfrac{\{Zy\}}{\{Wy\}}$，则 t 在 P 上，于是有 t: $\left[Z-\dfrac{\{Zy\}}{\{Wy\}}W\right]$或$[\{Wy\}Z-\{Zy\}W]$.

注：t 的方程为 $\{Wy\}\{Zx\}-\{Zy\}\{Wx\}=0$

或者
$$\{Wy\}\{Zx\}=\{Zy\}\{Wx\}.$$

15.4 验证第七章 6. 中的公理 6: 若两个三角形通过一点成透视，则它们也通过一条直线成透视.

证明：考虑图 15-2 中通过一点 P 成透视的三角形 ABC 和 $A'B'C'$. 取 P: (p), A: (a), B: (b), C: (c); 则 A': $(p)+\lambda(a)$, B': $(p)+\mu(b)$, C': $(p)+\nu(c)$.

令 $R=AB\cdot A'B'$, $S=BC\cdot B'C'$, $T=CA\cdot C'A'$. 因为 R 在直线 AB 上，根据定理 15.3, R 的坐标是(a)和(b)的某一线性组合. 因为 R 又在 $A'B'$ 上，这个线性组合一定是 $\lambda(a)-\mu(b)$，于是 R: $\lambda(a)-\mu(b)$,

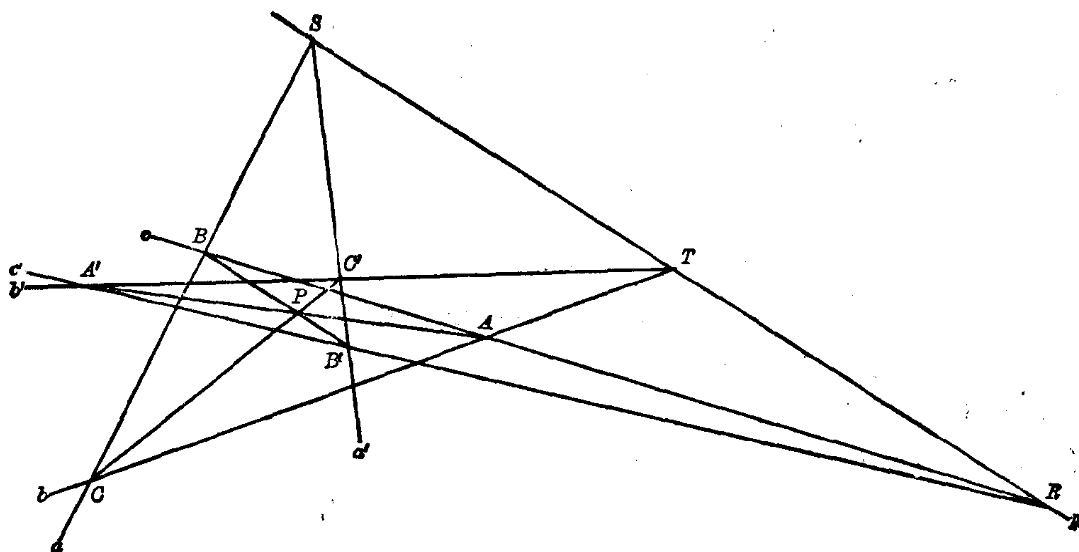


图 15-2

同理 $$S:\ \mu(b)-\nu(c),$$
$$T:\ \nu(c)-\lambda(a).$$

因为 $$\nu(c)-\lambda(a)=-1(\mu(b)-\nu(c))+(-1)(\lambda(a)-\mu(b)),$$
即 T 的坐标可以写成 R 和 S 的坐标的线性组合，所以 R, S, T 共线．于是，两个三角形通过直线 RST 成透视．

15.5 证明：笛沙格双三角形定理．

证明：利用图 15-2，取 A: (a), B: (b), C: (c); $C'=A'B'$: $\{Wx\}=W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3=0$, $a'=B'C'$: $\{Yx\}=0$, $b'=C'A'$: $\{Zx\}=0$. 在 A' 上直线的方程为 $\{Wx\}+\lambda\{Zx\}=0$.

根据习题 15.3，若
$$\{Za\}\cdot\{Wx\}=\{Wa\}\cdot\{Zx\},$$
则这条直线在 A 上．

同理，直线 BB', CC' 的方程分别是
$$\{Wb\}\{Yx\}=\{Yb\}\{Wx\}$$
和
$$\{Yc\}\{Zx\}=\{Zc\}\{Yx\}.$$
这些方程有公共解的条件可由消去 x_1, x_2, x_3 得出．

作乘积
$$\{Za\}\{Wx\}\cdot\{Wb\}\{Yx\}\cdot\{Yc\}\{Zx\}=\{Wa\}\{Zx\}\cdot\{Yb\}\{Wx\}\cdot\{Zc\}\cdot\{Yx\}$$
并消去公因子，我们得到

A, B, $C\,\overline{\wedge}\,A'$, B', C' 的条件：

(i) $\{Za\}\{Wb\}\{Yc\}=\{Wa\}\{Yb\}\{Zc\}$.

现在取 A: $\{aU\}=a_1U_1+a_2U_2+a_3U_3=0$, B: $\{bU\}=0$, C: $\{cU\}=0$, $C'=A'B'$: $[W]$, $a'=B'C'$: $[Y]$, $b'=C'A'$: $[Z]$. 直线 $a=BC$ 上的任一点的方程为：$\{bU\}+\lambda\{cU\}=0$，根据习题 15.2 的对偶，若 $\{cY\}\{bU\}=\{bY\}$, $\{cU\}$，则这点在 a' 上，即为点 S.

同理，点 R 和 T 的方程分别是 $\{bW\}\{aU\}=\{aW\}\{bU\}$ 和 $\{aZ\}\{cU\}=\{cZ\}\{aU\}$. 消去 U_1, U_2, U_3 得出这些点共线，即 a, b, $c\,\overline{\wedge}\,a'$, b' c' 的条件：

(i') $\{cY\}\{bW\}\{aZ\}=\{bY\}\{aW\}\{cZ\}$. 由于(i)和(i')是一致的，所以若两个三角形

通过一点(一条直线)成透视,则它们也通过一条直线(一点)成透视.

15.6 证明:习题15.5中的三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 有下列透视对应:

(i) 若 $\{Wa\}\{Yb\}\{Zc\}=\{Ya\}\{Zb\}\{Wc\}$, 则 $A, B, C \barwedge B', C', A'$.

(ii) 若 $\{Ya\}\{Zb\}\{Wc\}=\{Za\}\{Wb\}\{Yc\}$, 则 $A, B, C \barwedge C', A', B'$.

证明:(i) B' 上任一直线的方程为

$$\{Yx\}+\lambda\{Wx\}=0.$$

若 $\{Wa\}\{Yx\}=\{Ya\}\{Wx\}$, 则它在 A 上.

同理,直线 BC' 和 CA' 的方程分别为

$$\{Yb\}\{Zx\}=\{Zb\}\{Yx\} \quad 和 \quad \{Wc\}\{Zx\}=\{Zc\}\{Wx\}.$$

因此,若 $\{Wa\}\{Yb\}\{Zc\}=\{Ya\}\{Zb\}\{Wc\}$, 就有 $A, B, C \barwedge B', C', A'$. 这也是 $a, b, c \barwedge b', c', a'$ 的条件,这点留读者证明.

(ii) C' 上任一直线的方程为

$$\{Yx\}+\lambda\{Zx\}=0.$$

若 $\{Za\}\{Yx\}=\{Ya\}\{Zx\}$, 则它在 A 上.

同理,直线 BA' 和 CB' 的方程分别为

$$\{Wb\}\{Zx\}=\{Zb\}\{Wx\} \quad 和 \quad \{Yc\}\{Wx\}=\{Wc\}\{Yx\},$$

于是,若 $\{Za\}\{Wb\}\{Yc\}=\{Ya\}\{Zb\}\{Wc\}$, 就有

$$A, B, C \barwedge C', A', B',$$

这也是

$$a, b, c \barwedge c', a', b'$$

的条件,这点留给读者证明.

15.7 验证公理7:完全四点形的对边点决不共线.

证明:考虑图15-3中的完全四点形 $PQRS$, 它的对边点为 A, B, C. 选取 P: (p), Q: (q), R: (r), S: (s) 使得:$(p)+(q)+(r)+(s)=0$(见5.中的(iii)). 由 $(p)+(q)=-((r)+(s))$ 可知,点

$$(p)+(q)=(p+q)$$

和

$$(r)+(s)=(r+s)$$

相同,因为这个点同时在直线 PQ 和 RS 上,所以它是对边点 A.

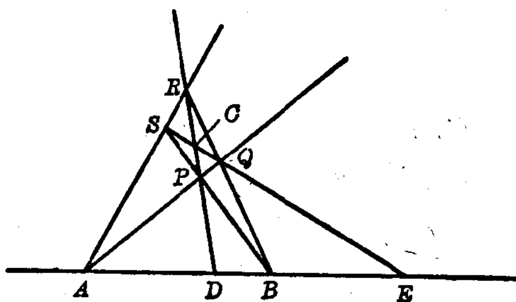


图 15-3

同理,$(p+s)$ 和 $(q+r)$ 确定对边点 B, $(p+r)$ 和 $(s+q)$ 确定对边点 C. 假设 A, B, C 共线,则存在不完全为零的数 λ, μ, ν, 使得

$$\lambda(r+s)+\mu(q+r)+\nu(s+q)=0,$$

因而 $(\mu+\nu)(q)+(\lambda+\mu)(r)+(\nu+\lambda)(s)=0$. 因为 λ, μ, ν 不全为零,所以 $(\mu+\nu)$, $(\lambda+\mu)$, $(\nu+\lambda)$ 不全为零.

因此 Q, R, S 共线,但这不可能,所以对边点决不共线.

15.8 证明:D: $(a)+\lambda(b)$ 关于 A: (a) 和 B: (b) 的调和共轭点为 E: $(a)-\lambda(b)$.

证明:参看图15-3, 由完全四点形 $PQRS$ 得 $H(A, B; D, E)$. 取 Q: (q) 和 P: $(a)+\mu(q)$. 因为 R 在 BQ 上,所以它的坐标形如 $\alpha(b)+\beta(q)$; R 又在 DP 上,于是 R: $\lambda(b)-$

$\mu(q)$. 因为 S 在 BP 和 AR 上,所以 S: $(a)-\lambda(b)+\mu(q)$. 最后,因为 E 在 QS 和 AB 上,所以 E: $(a)-\lambda(b)$.

§15.3 补 充 题

15.9 下列三元点组哪些共线?若共线,求出它们所在直线的方程. 若不共线,求出它们确定的三条直线的方程.

(1) (1, 0, −1), (1, −2, 1), (3, −2, −1);

(2) (1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 4, 1);

(3) (1, 2, 1), (3, 5, 2), (3, 4, 1);

(4) (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1).

答案: (1) $x_1+x_2+x_3=0$;

(2) $2x_1-x_2-x_3=0$; $3x_1-2x_2-x_3=0$; $2x_1-x_2-2x_3=0$.

15.10 下列三元线组,哪些共点?如果共点,求出它们的公共点的坐标;如果不共点,求出它们确定的三点的坐标:

(1) [1, 3, −2], [2, −2, 1], [11, 1, −2];

(2) [3, 2, −1], [1, 0, −2], [4, 1, 3];

(3) [1, 3, 1], [2, 1, 3], [0, 1, 0];

(4) [1, 1, −1], [1, −1, 1], [1, −1, −1].

答案: (1) (1, 5, 8);

(3) (8, −1, −5), (1, 0, −1), (3, 0, −2).

15.11 已知点 A: (1, 2, 3), B: (2, 4, 3), C: (1, 2, −2).

(i) 证明: A, B, C 共线;

(ii) 取 A, B, C 另一表示 (a), (b), (c),使得:

$$(a)+(b)+(c)=0;$$

(iii) 取另一表示,使得 $(a)+(b)=(c)$.

答案: (ii) $(a)=(7, 14, 21)$, $(b)=(-10, -20, -15)$, $(c)=(3, 6, -6)$;

(iii) $(a)=\left(-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, -7\right)$, $(b)=\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 5\right)$.

15.12 对于直线 p: [1, 3, −2] 和 q: [2, −2, 1], 求出 $[P]$ 和 $[Q]$ 的另一表示, 使得 r: $[R]=[11, 1, -2]$ 能表为: $[R]=[P]+[Q]$.

答案: $[P]=[3, 9, -6]$, $[Q]=[8, -8, 4]$.

15.13 已知点 A: (1, 2, 3), B: (2, 5, −6), C: (6, −7, 2), E: (4, 4, −1).

(i) 证明: 无三点共线;

(ii) 分别取另一表示 (a), (b), (c), (d),使得 $(a)+(b)+(c)+(d)=0$.

答案: $(a)=(4, 8, 12)$, $(b)=(6, 5, -18)$, $(c)=(6, -7, 2)$, $(d)=(-16, -16, 4)$.

15.14 把直线 u 的坐标 [1, 1, 1] 表为不共点直线 [1, 1, 0], [1, 0, 1], [0, 1, 1] 的线性组合.

15.15 证明: 直线 $x_1+2x_2+3x_3=0$,

$$4x_1+3x_2-x_3=0,$$

$$3x_1-5x_2+4x_3=0$$

组成一个三角形，写出这个三角形的每个顶点和点(1, 1, 1)的连线方程。

答案：$3x_1+x_2-4x_3=0,$

$5x_1\quad 18x_2+18x_3=0,$

$8x_1-17x_2+9x_3=0.$

15.16 在图 15-1 中，取 A: (1, 0, 0), B(0, 1, 0), C: (0, 0, 1), P: (1, 1, 1)，求图中所有其他点的坐标和所有直线的方程.

部分答案：C': (1, 1, 0), C'': (1, −1, 0), $p=A''B''C''$: $x_1+x_2+x_3=0$.

注：直线 p 是 P 关于三角形 ABC 的极线(见习题 3.11).

15.17 已知不同点 A_1: (1, 0, 0), A_2: (0, 1, 0), A_3: (1, 1, 1), A_4: (1, a^2, a), A_5: (1, b^2, b), A_6: (1, c^2, c).

(i) 推出：$A_1A_2\cdot A_4A_5=R$: (1, $-ab$, 0),

$A_2A_3\cdot A_5A_6=S$: (1, $b+c-bc$, 1) 和 RS: $abx_1+x_2-(b+c-bc+ab)x_3=0$;

(ii) 证明：R, S 和 $T=A_3A_4\cdot A_6A_1$ 共线.

15.18 证明巴普斯定理的特殊情况(见习题 3.4).

提示：取 A_1: (a), B_2: (b), P: (c), O: $(a+b+c)$, 则 C_3: $(a-b)$, C_2: $(a+c-b)$, C_1: $(a+2c-b)$.

15.19 在图 4-3 中，取 P: (1, 0, 0), Q: (0, 1, 0), R: (0, 0, 1), S: (1, 1, 1).

(a) 求图中所有其他点的坐标和所有直线的方程;

(b) 证明：由 P, Q, R, S 所确定的四个三角形中的每一个都与对角三角形成透视. 确定每一个透视的中心和轴.

部分答案：(a) C: (1, 0, 1), E: (1, 2, 1), F: (1, −1, 0), AC: $x_1-x_2-x_3=0$.

(b) 四个点 P, Q, R, S 和四条直线由定理 4.14 确定.

15.20 证明巴普斯定理.

提示：在图 2-9′ 中，取 A_1: (a), B_2: (b), A_3: (c), C_2: $(a)+(b)+(c)$, A_2: $(a)+\rho(c)$, B_1: $(a)+(b)+\sigma(c)$，则有

C_1: $\sigma(b)+(\sigma-\rho)(c)$,

C_3: $(\rho-\sigma)(a)+\rho(b)$.

15.21 证明直线 a: $x_1-x_2-x_3=0$, b: $3x_1-x_2+x_3=0$, C: $x_1+2x_3=0$ 共点，求直线 C 关于 a, b 的调和共轭线 d.

答案：$3x_1-2x_2-x_3=0$.

15.22 在习题 15.21 中，令 $Q=a\cdot b$，若 $C\neq Q$ 是 c 上的一点，直线 d 称为点 C 关于 a, b 的极线. 求 P: (1, 1, 2) 关于 a, b 的极线.

答案：$x_1+x_2+3x_3=0$.

15.23 在习题 15.18 中，证明 p 是 O 关于 r, s 的极线.

15.24 利用习题 15.5 和 15.6 的结果，证明：若两个三角形在下列透视 $ABC\,\overline{\wedge}\,A'B'C'$, $ABC\,\overline{\wedge}\,B'C'A'$, $ABC\,\overline{\wedge}\,C'A'B'$ 中有两个成立，则第三个也成立.

15.25 求习题 15.5 中的三角形下列透视成立的条件;

(i) $ABC \barwedge A'C'B'$,

(ii) $ABC \barwedge B'A'C'$,

(iii) $ABC \barwedge C'B'A'$.

部分答案：(i) $\{Za\}\cdot\{Yb\}\cdot\{Wc\}=\{Wa\}\cdot\{Zb\}\cdot\{Yc\}$.

15.26 证明：若习题15.5中的三角形在任何五种顺序中成透视，则它们成完全透视，即在六种可能的顺序中都成透视.

15.27 全部写出这一章最后三节的对偶.

15.28 已知 $A: (a)$, $B: (b)$, $D: (a+\lambda b)$, $E: (a+\mu b)$，推出 $(A, B; D, E)=\lambda/\mu$. 由此分隔可用交比来定义.

15.29 在下列情形中，确定 D, E 是否分隔 A, B:

(i) $A: (1, 1, 0)$, $B: (1, 0, 1)$, $D: (2, 1, 1)$, $E: (0, 1, -1)$;

(ii) $A: (1, 1, 0)$, $B: (1, 0, 1)$, $D: (2, 1, 1)$, $E: (3, 2, 1)$;

(iii) $A: (2, 1, 4)$, $B: (3, 5, -1)$, $D: (1, 1, 1)$, $E: (20, 31, -2)$;

(iv) $A: (1, -2, 3)$, $B: (-2, 3, 1)$, $D: (5, -7, -6)$, $E: (2, -5, -13)$

答案：(i)分隔.

第十六章　坐标系和射影变换

§16.1　基 本 内 容

1. 引　　言

前一章，我们把与点等同的三元有序数组几何引进作为平面射影几何的模型. 虽然把三元数组说成是点的坐标是方便的，但是应该承认，至少在那时，三元数组和熟知的点的坐标之间还存在着差别. 在我们的几何里，三元数组是一个点；而在平面解析几何里，点的坐标是与预先建立的坐标系有关，我们现在打算在射影直线和射影平面上建立适当的坐标系. 为简明起见，我们把所得的点的坐标都认为是它的*相对坐标*. 以后我们会发现，总能够在平面上建立这样的坐标系，使得第十五章中的三元数组——称它们为*绝对坐标*——为它们的相对坐标.

构造一种几何的第一步，就是要选取基本元素. 读者的几何知识也许只限于点的几何. 在这种几何中，点是基本元素. 对于这种几何来说，直线是一维的，平面是二维的，普通的空间是三维的. 而在三元有序数组的几何里，根据对偶原则，点和直线都是基本元素. 在第十五章中，我们知道，直线上的点可以由一个单参数给出；这样，直线上的点的几何便是一维的. 对偶地，在点上的直线也可以由一个单参数给出，所以在点上的直线几何也是一维的. 以后我们会看到，平面上的点几何和直线几何都是二维的.

在下面的考虑中，几何的性质由所选择的在基本元素的坐标上的一个变换集决定，在平面度量几何中，我们谈到所谓刚体运动——平移和旋转——的变换集，经过这种变换，线段的长度和角的度量都是不变的. 在现在这种几何里，我们要论及称为射影变换的变换集. 在这种变换下，交比保持不变.

2. 直线（点）上的射影坐标

在图 16–1 中考虑度量平面中的直线 o. 在 o 上取一点 O（从这点出发，将得到沿着直线的所有度量）和一个度量单位，并规定 o 的（正）方向，就在这直线上建立了常见的坐标系. 事实上，就是在 o 上选取两点 O 和 U，规定它们的坐标分别是 0 和 1，则 o 上任意第三点 X 的非齐次坐标就是 O 到 X 的有向距离. 进而，在 o 上的齐次坐标系便可以这样来建立：规定 O 的坐标为 $(0,\ 1)$，U 的坐标为 $(1,\ 1)$，以 x 为非齐次坐标的点 X 的齐次坐标为满足 $\dfrac{x_1}{x_2}=x$ 的数对 $(x_1,\ x_2)$.

下面考虑射影平面里的直线 o（见图 16–2）. 在 o 上取两个不同点 A: $(a)=(a_1, a_2, a_3)$，B: $(b)=(b_1,\ b_2,\ b_3)$. 在这些表示保持不变的条件下，任意选取非零实数 $\lambda,\ \mu$ 可确定 o 上的唯一一点 X: $(x)=(\lambda a+\mu b)$. 反之，对 X 的表示 (x)，我们可以找到数对 $\lambda,\ \mu$. 现在假

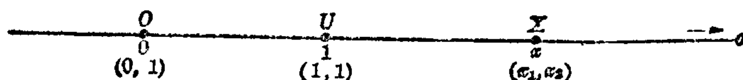


图 16-1

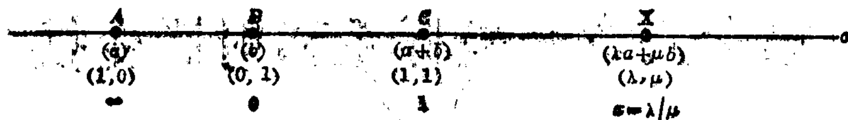


图 16-2

定采用 X 的另一表示，比如说(αx)，则由$(\alpha x)=(\alpha\lambda a+\alpha\mu b)$，便得到新的数对 $\alpha\lambda$, $\alpha\mu$. 但是，由于这一数对是由另一数对乘以常数而得，所以这并没有什么关系. 上面的计算是在 A、B 的表示保持不变的限制下进行的. 为了说明这个限制的必要性，我们只需取新的表示：A: (αa) 和 B: (βb). 这时，对于上面选取的 λ, μ, $(\alpha\lambda a+\beta\mu b)$ 表示 o 上的一个异于 X 的点. 固定基本点 A, B 的表示，可由选择 o 上的第三个点 C: (c) 和选取 A, B 的表示(a^*), (b^*)，使得 $(a^*)+(b^*)=(c)$ 来实现.

我们定义：

对于满足 $(a)+(b)=(c)$ 的不同三点 A: (a), B: (b), C: (c) 组成的直线 o 上的坐标系，o 上任一点 $X(x)$ 的**相对齐次射影坐标**就是 (λ, μ)，其中 $(x)=\lambda(a)+\mu(b)$. 同一点的**横坐标**或**相对非齐次射影坐标**为 $x=\lambda/\mu$.

事实上，直线上的齐次射影坐标系可这样建立：

(i) 在直线上选取三个不同的点(**坐标点**)，

(ii) 指定其中两个点 A, B(**基本点**)的坐标依次为 $(1, 0)$, $(0, 1)$,

(iii) 指定剩下一点 C(**单位点**)的坐标为$(1, 1)$.

同样是这些点，可建立直线上的非齐次坐标系，在这个坐标系中，A, B, C 的坐标分别为 ∞, 0, 1.

例 16.1 若取 A: $(2, 1, -3)$, B: $(4, -2, 4)$, C: $(10, -1, 0)$ 为直线 o 上的坐标点，求 o 上点 D: $(8, 2, -7)$ 的齐次射影坐标和非齐次射影坐标.

解：首先，选取新的表示(见例 15.5) A: $(a)=(4, 2, -6)$, B: $(b)=(6, -3, 6)$，使得：C: $(a+b)$. 现在令 $\lambda(a)+\mu(b)=(8, 2, -7)$并解方程组

$$\begin{cases} 4\lambda+6\mu=8, \\ 2\lambda-3\mu=2, \\ -6\lambda+6\mu=-7, \end{cases} \qquad \text{得 } \lambda=3/2,\ \mu=1/3.$$

于是，关于相对齐次坐标，我们有 D: $(3/2, 1/3)$；它的另一表示是D: $(9, 2)$. 非齐次坐标为 $\lambda/\mu=\dfrac{3/2}{1/3}=9/2$.

在习题 16.1 中，我们将证明：

定理 16.1 直线上任意四点的交比与直线上建立的坐标系无关.

对偶地，在一点 O 上的齐次射影坐标系可以这样来建立：指定 O 上的两条基本直线 a, b 的坐标为 $[1, 0]$ 和 $[0, 1]$, O 上的第三条直线 c 的坐标为 $[1, 1]$. 这些直线也可以建立非齐次坐标系，在此坐标系中，a, b, c 分别有坐标 ∞, 0, 1. 例如，读者只需写出例 16.1

的对偶，其中 A: (2, 1, −3) 变成 a: [2, 1, −3]，等等. 考虑到这点，我们在以后三节中将只考虑直线上的坐标系. 并把写出这三节连同所有例题和习题的对偶这个任务留给读者作为练习.

3. 一维射影变换

在射影平面里，任取两条不同的直线. 在其中一条上选择三个不同点 P, Q, R, 并假定关于事先在直线上建立的坐标系求得它们的非齐次坐标是: P: p, Q: q, R: r. 同样，在另一直线上假定也选取了三个不同的点 P', Q', R', 且求得它们关于事先建立的坐标系的非齐次坐标是 P': p', Q': q', R': r'. 设 X: x 和 X': x' 是射影 $(P, Q, R)\barwedge(P', Q', R')$ 中的另一对对应点，则:

$$(P, Q; R, X)=(P', Q'; R', X'), \tag{1}$$

所以

$$\frac{(p-r)(q-x)}{(p-x)(q-r)}=\frac{(p'-r')(q'-x')}{(p'-x')(q'-r')}. \tag{2}$$

我们现在来解(2)，用 x 表 x':

令 $p-r/q-r=s$, $(p'-r')/(q'-r')=s'$, 便得:

$$s\cdot(q-x)/(p-x)=s'\cdot(q'-x')/(p'-x'),$$
$$s(x'x-qx'-p'x+p'q)=s'(x'x-p'x'-q'x+pq'),$$
$$[(s-s')x+ps'-qs]x'=(sp'-s'q')x+pq's'-p'qs.$$

所以

$$x'=(ax+b)/(cx+d), \tag{3}$$

其中 $a=sp'-s'q'$, $b=pq's'-p'qs$, $c=s-s'$, $d=ps'-qs$.

利用射影坐标，令 $x=x_1/x_2$, $x'=x_1'/x_2'$,

则

$$x_1'/x_2'=(ax_1+bx_2)/(cx_1+dx_2) \tag{4}$$

或者

$$\begin{aligned}\rho x_1'&=ax_1+bx_2,\\ \rho x_2'&=cx_1+dx_2,\end{aligned}\quad \rho\neq 0. \tag{5}$$

方程 (3), (4), (5) 可以说成是一点列到另一点列的映射，或者是将一条直线上的点变到另一条直线上的点的射影变换，或者是两个不同点列之间的射影.

对偶地，我们有:

$$X'=(AX+B)/(CX+D), \tag{3'}$$
$$X_1'/X_2'=(AX_1+BX_2)/CX_1+DX_2), \tag{4'}$$
$$\begin{aligned}\rho X_1'&=AX_1+BX_2,\\ \rho X_2'&=CX_1+DX_2,\end{aligned}\quad \rho\neq 0, \tag{5'}$$

它们就是将一点 O 上的直线变成另一点 O' 上的直线的射影变换的非齐次和齐次坐标方程.

方程(3)也具有通常称为线性变换的形式，那么每一线性变换:

$$\tau:\ x'=(ax+b)/(cx+d) \tag{3''}$$

(其中 a, b, c, d 不全为 0)都是射影变换，亦即变换有逆变换，且保持交比不变? 我们要证明: 若(3″)将不同的点变成不同的点，则(3″)是射影变换.

设 $P: p$ 和 $Q: q$ 是直线 o 上任意两个不同的点. $P': p'=\frac{ap+b}{cp+d}$ 和 Q': $q'=\frac{aq+b}{cq+d}$ 分别是它们在另一直线 o' 或同一直线 o 上的对应点. 由于 $p-q\neq 0$, 故从

$$p'-q'=(ad-bc)(p-q)/(cp+d)(cq+d)$$

可知, 当且仅当 $ad-bc\neq 0$ 时, $p'-q'\neq 0$.

现在考虑(3″), 并约定 $ad-bc\neq 0$. 于是可以由(3″)解得:

$$x=\frac{dx'-b}{-cx'+a}.$$

用它代入(3″), 容易说明它是(3″)的逆.

最后, 设 $P: p$, $P': p'$; $Q: q$, $Q': q'$; $R: r$, $R': r'$; $S: s$, $S': s'$ 是任意四对不同的对应点, 由

$$p'-r'=(ad-bc)(p-r)/(cp+d)(cr+d),$$
$$q'-r'=(ad-bc)(q-r)/(cq+d)(cr+d),$$
$$p'-s'=(ad-bc)(p-s)/(cp+d)(cs+d),$$
$$q'-s'=(ad-bc)(q-s)/(cq+d)(cs+d),$$

通过简单的计算, 得到

$$\begin{aligned}(P', Q; R', S')&=(p'-r')(q'-s')/(p'-s')(q'-r')\\&=(p-r)(q-s)/(p-s)(q-r)\\&=(P, Q; R, S).\end{aligned}$$

于是我们证明了:

定理 16.2 每一线性变换

$$\tau: x'=(ax+b)/(cx+d) \quad (ad-bc\neq 0)$$

都是射影变换.

例 16.2 给定直线 o 上的三点 P: 2, Q: 3, R: 4 和另一直线 o' 上的三点 P': 3, Q': 4, R': 2.

(a) 求出把 P, Q, R 分别变到 P', Q', R' 的线性变换.

(b) 确定 o 上之点 S: -1 在 o' 上的对应点 S'.

(c) 确定 o' 上的点 T': 0 在 o 上的对应点 T.

(d) 此变换是否是射影变换?

解: (a) 因为 $x=2$, $x'=3$. 故利用(3″)有 $3=\frac{2a+b}{2c+d}$ 或

$$2a+b-6c-3d=0. \tag{i}$$

同理,

$$3a+b-12c-4d=0, \tag{ii}$$
$$4a+b-8c-2d=0. \tag{iii}$$

(ii) − (i), (iii) − (i), 得

$$a-6c-d=0,$$
$$2a-2c+d=0.$$

再将这两式相加便得: $3a+8c=0$, 取 $a=8$, $c=3$, 则 $d=-10$, $b=-28$. 所求的变换为

$$x'=\frac{8x-28}{3x-10}.$$

(b) 当 $x=-1$ 时, $x'=\frac{-8-28}{3-10}=36/13$.

(c) 当 $x'=0$ 时，$8x-28=0$，$x=7/2$.

(d) 因为 $ad-bc=4\neq 0$，所以变换是射影变换.

在习题 16.2 中，我们将证明：

定理 16.3 若两个射影点列的三对对应点的连线共点，则这两个射影点列是透视的.

4. 直线上的射影(非齐次坐标)

今设上节中的两直线 o 和 o' 重合，则射影变换

$$\tau:\ x'=\frac{ax+b}{cx+d},\ ad-bc\neq 0 \tag{6}$$

有两种解释.

第一种解释：直线 o 上有关于两个不同坐标系的一个点列. o 上的每一点 X 都有两个坐标——在一坐标系中的坐标为 x，在另一坐标系的坐标为 x'——而(6)式只是把每一 x 变成相应的 x'. 在这种解释下，(6) 式叫做*被动变换*或*图象固定坐标移动的变换*，或*坐标变换*.

第二种解释：直线 o 上有关于同一坐标系的两个迭置点列. 这时 (6) 式一般地将直线 o 上一点 $X:x$ 变到直线 o 上的另一点 $X':x'$. 在这种解释下，(6) 叫做*主动变换*或*坐标固定图象移动的变换*.

作为图象移动的变换. (6)式就是直线上射影的解析定义，我们常称它为直线上的*直射变换*.

现在我们来研究在两迭置点列之间直射变换(6)式将某点 M 变成它自身的可能. 这种点 M 如果存在的话，就称为射影的*二重(固定，自对应或不变)点*. 我们只要在(6)中令 $x=x'$. 并解所得的关于 x 的二次方程，便得二重点.

我们先考虑当 $c=0$ 的特殊情形. 这时，二次方程实际上是一个线性方程，所以 $x=\infty$ 总是一个根. 因而 $M:\infty$ 总是一个二重点.

(i) 当 $c=0,\ b\neq 0,\ a\neq d$ 时，$(d-a)x=b$；存在两个不同的二重点：$M:\infty$，$N:\dfrac{b}{d-a}$.

(ii) 当 $c=0,\ b\neq 0,\ a=d$ 时，(i) 中的二重点 M 和 N 重合，只存在一个二重点：$M:\infty$.

(iii) 当 $c=b=0,\ a\neq d$ 时，$(d-a)x=0$. 存在两个二重点：$M:\infty$，$N:0$.

(iv) 当 $c=b=0,\ a=d$ 时，直线上每一点都是二重点，这个射影就是恒等变换.

此外，当 $x'=x$ 时，(6) 可写为

$$cx^2+(d-a)x-b=0,\ c\neq 0,$$

它的根是：

$$x_1=\frac{a-d+\sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c}$$

和

$$x_2=\frac{a-d-\sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c}.$$

可分为三种情况：

(1) $(d-a)^2+4bc>0$. 则两根是不同实根. 存在二个不同的二重点. τ 叫做*双曲型射影*.

(2) $(d-a)^2+4bc=0$. 则两根是相等实根，存在一个二重点，τ 叫做抛物型射影.

(3) $(d-a)^2+4bc<0$. 则两根是复根，没有实二重根，τ 叫做椭圆型射影.

于是，除恒等变换以外，τ 或是双曲型，或是抛物型，或是椭圆型(见习题 16.3).

在习题 16.4 中，我们将证明

定理 16.4　双曲型射影的两个二重元素和一对对应元素的交比 K 与这对对应元素的选择无关.

这个实常数 K 叫做双曲型射影的*特征不变量*. 由此可知，任一双曲型射影都可写成标准型：

$$(x'-x_2)/(x'-x_1)=K\cdot(x-x_2)/(x-x_1),$$

其中 x_1, x_2 是二重点，K 是特征不变量.

在习题 16.5 中，我们得到抛物型射影的标准型：

当 $c=0$ 时，$x'=x+p$, $p=\dfrac{b}{a}$;

当 $c\neq0$ 时，$\dfrac{1}{x'-x_1}=\dfrac{1}{x-x_1}+p$, $p=\dfrac{-c}{cx_1-a}$.

例 16.3　把下列射影化为标准型：(a) $x'=\dfrac{-5x+6}{2x-4}$, (b) $x'=\dfrac{3x-8}{2x-5}$.

解：(a) 这个射影是以 M: 3/2, N: -2 为二重点的双曲型射影. 利用它们的对应点对 P: 1; P': $-1/2$, 我们求得：

$$K=(M,\ N;P,\ P')=(3/2,\ -2;1,\ -1/2)=1/8.$$

标准型为

$$\frac{x'+2}{x'-\dfrac{3}{2}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{x+2}{x-\dfrac{3}{2}}.$$

(b) 这个射影是以 M: 2 为二重点的抛物型射影. 标准型为

$$\frac{1}{x'-2}=\frac{1}{x-2}-2.$$

5. 直线上的对合

设 τ 是直线到它自身上的一个射影变换，它的逆 $\tau^{-1}=\tau$(例题见习题 16.13(f)). 则 $\tau\cdot\tau^{-1}=\tau^{-1}\cdot\tau=\tau^2=\mathscr{G}$ 是恒等变换. 这时，射影变换 τ 叫做*二次对合*，通常简称为对合. 若 p, p' 是一对合的一对对应点，则 p', p 也是它的一对对应点. 因此，我们说 p, p' 是对合的*互逆对*(见第六章).

在习题 16.6 中，我们将证明：

定理 16.5　射影变换

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{3}$$

为对合的充要条件是 $a+d=0$.

对合的方程可以写成如下的形式：

$$fxx'+g(x+x')+h=0,\ g^2-fh\neq0, \tag{7}$$

因此，对合可由它的任意两对互逆点完全确定.

例 16.4 求以 $x_1, x_1'; x_2, x_2'$ 为两对互逆对的对合的方程.

解：将每一对都代入(7)式得：

$$fx_1x_1'+g(x_1+x_1')+h=0,$$
$$fx_2x_2'+g(x_2+x_2')+h=0.$$

消去(7)和上述两方程的系数，则所求的方程可表为行列式

$$\begin{vmatrix} xx' & x+x' & 1 \\ x_1x_1' & x_1+x_1' & 1 \\ x_2x_2' & x_2+x_2' & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

在(7)中令 $x=x'$，解所得方程可以求得对合的二重点. 这时，或者方程有两个不同实根(对合是**双曲型**的)，或者有相同实根(对合是**抛物型**的)，或者有虚根(对合是**椭圆型**的). 抛物型对合一般不予考虑(见习题 16.26). 双曲型对合当已知它的两个二重点或一个二重点和另一对互逆对时，便完全确定了.

再就是当一个对合的求二重点的二次方程为已知时，对合也完全确定. 因为假设这个方程是：

$$ax^2+2bx+c=0 \quad (b^2-ac\neq 0), \tag{9}$$

则对合的方程是

$$axx'+b(x+x')+c=0, \tag{10}$$

它是双曲型还是椭圆型依照(9)的根为实根还是虚根而定. 方程(10)可以通过(9)用下面的法则得到：

用 xx' 代替 x^2，用 $x+x'$ 代替 $2x$，

方程(10)叫做方程(9)的**极化形式**.

例 16.5 从对合的求二重点的方程 $3x^2+5x-6=0$ 推出该对合的方程.

解：极化已知方程得：

$$3xx'+\frac{5}{2}(x+x')-6=0$$

或

$$6xx'+5(x+x')-12=0.$$

不难证明：

定理 16.6 已知点 x_1, x_2 的调和点对 x, x' 是以 x_1, x_2 为二重点的对合的互逆对.

6. 直线上的射影(齐次坐标)

利用齐次坐标可以大大地简化直线上和平面上(或高维射影空间中)的射影变换的研究. 在这一节中，我们利用

$$\begin{cases}\rho x_1'=ax_1+bx_2, \\ \rho x_2'=cx_1+dx_2\end{cases} \quad (ad-bc\neq 0) \tag{5}$$

重新研究直线上的射影变换.

为了给以后的讨论作准备，我们打算改变记号，把(5)写成

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases} \quad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0). \tag{11}$$

为了研究可能的二重点我们在(11)中以 x_1 代替 x_1'，x_2 代替 x_2'，考虑所得到的方程：

$$\begin{cases}(a_{11}-\rho)x_1+a_{12}x_2=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\rho)x_2=0.\end{cases} \tag{12}$$

(12)有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\rho \end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

或
$$\rho^2-(a_{11}+a_{22})\rho+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0.$$

方程(13)叫做射影变换的*特征方程*，它的根 ρ_1、ρ_2 叫做*特征根*. 一个非恒等射影变换(5)是双曲型、抛物型、还是椭圆型依照 ρ_1, ρ_2 是相异实数，相等实数还是虚根而定：

例 16.6 研究射影变换

$$\begin{cases}\rho x_1'=2x_1+5x_2\\ \rho x_2'=2x_1-x_2\end{cases}\text{的二重点.}$$

解：特征方程是：

$$\begin{vmatrix} 2-\rho & 5 \\ 2 & -1-\rho \end{vmatrix}\equiv\rho^2-\rho-12=0;$$

特征根为 $\rho_1=4$, $\rho_2=-3$. 当把 $\rho_1=4$, $\rho_2=-3$ 代入下列方程

$$(2-\rho)x_1+5x_2=0,$$
$$2x_1+(-1-\rho)x_2=0$$

的任一个时，我们都可以得到射影变换的二重点. 利用第一个方程，我们求得：

$$(2-4)x_1+5x_2=-2x_1+5x_2=0;\ \text{二重点是}(5,\ 2),$$
$$(2+3)x_1+5x_2=5x_1+5x_2=0\quad\text{二重点是}(1,\ -1).$$

读者可以自行验证，当我们利用第二个方程时，可得相同的结果. 所以射影变换是双曲型的.

由定理 16.5, 直线上任一对合都具有下述形式：

$$\begin{aligned}\rho x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \rho x_2'&=a_{21}x_1-a_{11}x_2,\end{aligned}\qquad a_{11}^2+a_{12}a_{21}\neq0,$$

它的不变点满足

$$a_{21}x_1^2-2a_{11}x_1x_2-a_{12}x_2^2=0.$$

而此对合是双曲型的还是椭圆型的，依照 $a_{11}^2+a_{12}a_{21}>0$ 还是 <0 而定.

7. 平面上的齐次点坐标

在建立直线上的坐标系的过程中，我们用了直线上的任意三个点 A: (a), B: (b), C: $(a+b)$. 对于这个坐标系，直线上的任意第四个点 P: (p) 的齐次坐标就是满足 $(p)=p_1(a)+p_2(b)$ 的有序数对 $(p_1,\ p_2)$. 此坐标系的基本点就是 A 和 B; 而第三点 C 的作用只是为了使 A 和 B 始终保持固定的表示(绝对坐标). 把上述作法稍加扩充就可以用来建立射影平面上的坐标系.

在平面上任取四点 A_1, A_2, A_3, A_4(没有任何三点共线)，选取前三点表示 A_1: (a), A_2: (b), A_3: (c)，使得 A_4: $(a+b+c)$. 注意：A_4 的作用只是用来固定 A_1, A_2, A_3, 的表示. 这三个点是一个三角形的顶点. 这个三角形叫做*坐标三角形*. 点 A_4 叫做*单位点*. 这样建立的坐标系记为 A_1, A_2, A_3; A_4. 利用这个坐标系，我们定义*相对坐标*为：A_1: $(1,\ 0,\ 0)$, A_2:

$(0, 1, 0)$, A_3: $(0, 0, 1)$; A_4: $(1, 1, 1)$. 而对任意点 Y: (y), 它的相对坐标为 Y: (α, β, γ), 其中 $(y)=\alpha(a)+\beta(b)+\gamma(c)$.

例 16.7 取四个点 A_1, A_2, A_3, A_4, 它们的绝对坐标分别为 A_1: $(1, 2, 3)$, A_2: $(2, -3, 4)$, A_3: $(4, 5, -6)$, A_4: $(11, 9, -5)$(读者可以验证,其中没有三点共线). 建立坐标系 A_1, A_2, A_3; A_4 并求:

(1) 绝对坐标为$(2, 2, 1)$的点 P 的相对坐标.

(2) 相对坐标为$(4, -2, 1)$的点 Q 的绝对坐标.

(3) 任意一点 X 的绝对坐标(x_1'', x_2'', x_3'')和相对坐标(x_1, x_2, x_3)的关系.

解: 首先,我们固定表示 A_1: (a), A_2: (b), A_3: (c), 使得: A_4: $(a+b+c)$. 令 $\lambda(1,2,3)+\mu(2, -3, 4)+\nu(4, 5, -6)=(11, 9, -5)$,

解方程组

$$\begin{cases}\lambda+2\mu+4\nu=11,\\ 2\lambda-3\mu+5\nu=9,\\ 3\lambda+4\mu-6\nu=-5,\end{cases}\quad 得 \lambda=1,\ \mu=1,\ \nu=2.$$

则 A_1: $(1, 2, 3)$, A_2: $(2, -3, 4)$, A_3: $(8, 10, -12)$; A_4: $(11, 9, -5)$ 满足坐标三角形的及单位点的所有要求.

(1) 令 $\alpha(1, 2, 3)+\beta(2, -3, 4)+\gamma(8, 10, -12)=(2, 2, 1)$.

解方程组

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+\ 8\gamma=2,\\ 2\alpha-3\beta+10\gamma=2,\\ 3\alpha+4\beta-12\gamma=1,\end{cases}\quad 得: \alpha=37/60,\ \beta=7/40,\ \gamma=31/240.$$

所以 P 的相对坐标为 P: $(37/60, 7/40, 31/240)$ 或 P: $(148, 42, 31)$.

(2) Q 的相对坐标为: $\alpha=4$, $\beta=-2$, $\gamma=1$. 则它的绝对坐标为: $4(1,2,3)-2(2,-3,4)+1(8, 10, -12)=(8, 24, -8)$. 或 Q: $(1, 3, -1)$.

(3) 把(2)式中的$(4, -2, 1)$看作(x_1, x_2, x_3), 则 Q: $(\rho x_1'', \rho x_2'', \rho x_3'')$由下述方程给出:

$$\begin{cases}1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ 8x_3=\rho x_1'',\\ 2\cdot x_1-3\cdot x_2+10x_3=\rho x_2'',\\ 3\cdot x_1+4\cdot x_2-12x_3=\rho x_3''.\end{cases}$$

上述第一、第二、第三个方程中的 x_1, x_2, x_3 的乘数分别是坐标三角形的第一、第二、第三个顶点的绝对坐标.

和度量几何一样,适当选取坐标系,可以简化解析证明.

例 16.8 (a) 对于笛沙格双三角形定理(习题 15.4)的证明, 可取其中一个三角形(参看图 16.3)作为坐标三角形而取它的透视中心作为单位点.

(b) 对于巴普斯定理的证明, 可取 A_1: $(1, 0, 0)$, B_2: $(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$ 和 C_2: $(1, 1, 1)$(见图 2-9′).

(c) 在研究完全四点形时,它的顶点可取为坐标三角形的顶点和单位点,或把对角三角形取为坐标三角形,把四点形的另一顶点取为单位点(见习题 16.41).

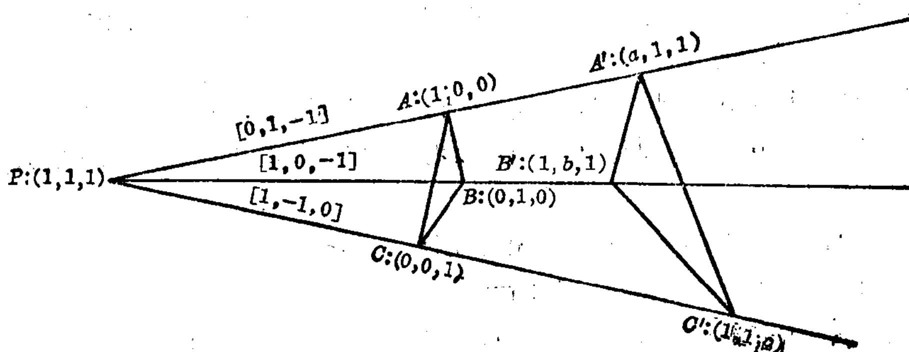


图　16-3

3．绝对坐标和相对坐标的关系

在下面的讨论中，我们假定读者熟悉矩阵代数(在本书附录中有矩阵代数的简介)．为了更有效地利用矩阵代数的知识，我们有必要改变坐标三角形顶点的记号．对于上面所定义的坐标三角形，我们写成：A_1: (a_{11}, a_{21}, a_{31})，A_2: (a_{12}, a_{22}, a_{32})，A_3: (a_{13}, a_{23}, a_{33})，其中第二个下标标出点，而第一个下标标出该点的各个坐标．所以，任意一点X的绝对坐标 (x_1'', x_2'', x_3'') 与相对坐标 (x_1, x_2, x_3) [见例 16.7(c)]满足

$$\rho x_1''=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,$$
$$\rho x_2''=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,$$
$$\rho x_3''=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3.$$

写成矩阵形式，就是

$$\rho\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ $(i, j=1, 2, 3)$，$\rho\neq 0$ 是一个比例因子．利用(14)式，我们把相对坐标化为绝对坐标．

因为 A_1, A_2, A_3 不共线，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因此，存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$．(14)两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\rho\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

或者

$$\delta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}.\tag{15}$$

通过此式，我们把绝对坐标化为相对坐标．

只要建立了坐标系，我们就可以写出(14)，应注意，$\boldsymbol{A}$ 的各列元素依次是坐标三角形的顶点 A_1, A_2, A_3 的绝对坐标．

例 16.9　对于例 16.7 的坐标系，(14)，(15)分别变为：

$$\rho\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&8\\2&-3&10\\3&4&-12\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

及

$$\text{(i)}\quad \delta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{240}\begin{bmatrix}-4&56&44\\54&-36&6\\17&2&-7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}(\operatorname{adj}A)\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}.$$

以 δ 代替 $\delta|A|$，则(i)可写成：

$$\text{(ii)}\quad \delta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\operatorname{adj}A)\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}.$$

9．关于两个坐标系的坐标

在射影平面上考虑第二个坐标系，它以 $B_1B_2B_3$ 为坐标三角形，以 B_4 为单位点．由上节可知，点 X 关于这个坐标系的绝对坐标(x_1'', x_2'', x_3'')和相对坐标(x_1', x_2', x_3')满足

$$\rho\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}\tag{16}$$

及

$$\delta\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}.\tag{17}$$

由(14)和(16)，得到关系

$$\tau' B\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

由此可得：

$$\tau'\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=B^{-1}\cdot A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.\tag{18}$$

所以，若已知点 X 关于坐标系 $A_1, A_2, A_3; A_4$ 的坐标(x_1, x_2, x_3)，由此式它可以得出 X 关于坐标系 $B_1, B_2, B_3; B_4$ 的坐标 (x_1', x_2', x_3')，同样，若已知点 X关于坐标系 $B_1, B_2, B_3; B_4$ 的坐标(x_1', x_2', x_3')，它关于坐标系 $A_1, A_2, A_3; A_4$ 的坐标(x_1, x_2, x_3)可由下式给出：

$$\tau\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A^{-1}\cdot B\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=D\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}.\tag{19}$$

考虑(18)中矩阵 $C=B^{-1}\cdot A$，A 的列元素是坐标三角形 $A_1A_2A_3$ 的顶点的绝对坐标．于是 C 的列元素是同一三角形的顶点关于坐标系 $B_1, B_2, B_3; B_4$ 的坐标．对 (19) 中的 $D=A^{-1}\cdot B$ 也可给出类似的解释，我们得到：

若已知一个点关于坐标系 ϑ_1 的坐标，这个点关于另一坐标系 ϑ_2 的坐标可以将自己的坐标左乘一个矩阵而求得，这个矩阵的各列是 ϑ_1 的坐标三角形的顶点关于坐标系 ϑ_2 的坐标.

10. 平面上的射影变换

方程

$$\rho\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad |\boldsymbol{E}|=[e_{ij}]\neq 0 \tag{20}$$

及

$$\delta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}^{-1}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix} \tag{21}$$

可解释为：(i)把点 X 关于坐标系 ϑ_1 的相对坐标变成它的绝对坐标 (x_1', x_2', x_3'). 或者反过来；(ii)把点 X 关于坐标系 ϑ_1 的相对坐标(x_1, x_2, x_3)变成它关于坐标 ϑ_2 的相对坐标，或者反过来. 但若注意到存在一个坐标系——叫做自然坐标系——使得点在这个坐标系的绝对坐标就是它自己的相对坐标，则这两种解释就变成相同的了. 自然坐标系由带绝对坐标的点 A_1: (1, 0, 0), A_2: (0, 1, 0), A_3: (0, 0, 1), A_4: (1, 1, 1)来定义. 带绝对坐标的任何一点 X: (x_1, x_2, x_3) 都可以写成 $x_1(1, 0, 0)+x_2(0, 1, 0)+x_3(0, 0, 1)$. 因而，$X$ 关于自然坐标系的相对坐标为 (x_1, x_2, x_3).

所以(20), (21)的作用，只是改变平面上每点的名称(坐标). 基于这点，(20)和(21)叫做*被动变换*或*图象固定坐标移动的变换*.

正如(5)式那样，对(20)用第二种解释也是可行的. 这时，我们有两个不同点 X: (x_1, x_2, x_3)和 X': (x_1', x_2', x_3')，它们的坐标是关于同一个坐标系的，于是(20)将 X 变到 X'，而(21)又将 X' 变回到 X. 基于这种解释，(20)和(21)都叫*主动变换*或*坐标固定图象移动的变换*.

我们现在可以把(20)和(21)写成更简洁的形式：

$$\rho X'^T=\boldsymbol{E}X^T \quad 及 \quad \delta X^T=\boldsymbol{E}^{-1}X'^T.$$

若我们把开始的向量记号 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 代之以熟悉的 $X=(x_1, x_2, x_3)$，那么，就可避免这个麻烦的记法. 我们今后打算省略转置符号，只要记住在用矩阵写出的变换方程中，点的坐标自然地写成 3×1 矩阵或三阶方阵的一列. 在这种理解下，我们有：

$$\rho X'=\boldsymbol{E}X \tag{20}$$

及

$$\delta X=\boldsymbol{E}^{-1}X'. \tag{21}$$

这样做不会发生误会. 因为从字母上看，$\boldsymbol{E}X=[e_{ij}]\cdot[x_1, x_2, x_3]$ 是没有意义的.

在习题 16.7 中我们将证明：

定理 16.7 变换(20)保持共线性.

在习题16.46中要求读者证明:

定理 16.8 变换(20)保持交比不变.

例 16.10 以坐标系 ϑ_1 为基准，以点 A_1: (a_{11}, a_{21}, a_{31}), A_2: (a_{12}, a_{22}, a_{32}), A_3: (a_{13}, a_{23}, a_{33})为坐标三角形，以 A_4: $(\sum_j a_{1j}, \sum_j a_{2j}, \sum_j a_{3j})$为单位点，建立新的坐标系 ϑ_2. 关于 ϑ_2 令 A_1 的坐标为 $(1, 0, 0)$, A_2 的坐标为 $(0, 1, 0)$, A_3 的坐标为 $(0, 0, 1)$. 又设任意一点 X 在 ϑ_1 下的坐标为 (x_1, x_2, x_3)，而在 ϑ_2 下的坐标为 (x'_1, x'_2, x'_3).

(a) 写出从一个坐标系到另一个坐标系的变换方程(20)和(21).

(b) 证明(20)的第二种变换形式

$$\tau x''=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} X'=\boldsymbol{D}X' \quad |\boldsymbol{D}|\neq 0$$

保持坐标三角形不变而单位点改变.

解: (a) 由于(21)将 $(1, 0, 0)$ 变成 (a_{11}, a_{21}, a_{31})，将 $(0, 1, 0)$变成(a_{12}, a_{22}, a_{32})，将 $(0, 0, 1)$变成(a_{13}, a_{23}, a_{33}). 对于(21)，我们求得:

(i)
$$\delta X=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} X'=\boldsymbol{A}X'=\boldsymbol{E}^{-1}X';$$

对于(20)，我们得到:

(ii)
$$\rho X'=\boldsymbol{A}^{-1}X=\boldsymbol{E}X.$$

(b) 应用逆变换 $\tau' X'=\boldsymbol{D}^{-1}X''$，于(i)，我们求得

(iii)
$$\delta X=\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}X''=\begin{bmatrix} a_{11}/a & a_{12}/b & a_{13}/c \\ a_{21}/a & a_{22}/b & a_{23}/c \\ a_{31}/a & a_{32}/b & a_{33}/c \end{bmatrix} X''.$$

称它为新坐标系 ϑ_3. 现在(iii)将 ϑ_3 的坐标三角形的顶点分别变回到$(a_{11}/a, a_{21}/a, a_{31}/a)$, $(a_{12}/b, a_{22}/b, a_{32}/b)$, $(a_{13}/c, a_{23}/c, a_{33}/c)$，而它们只不过是关于 ϑ_1 的坐标三角形的顶点的不同表示. 所以，$\tau X''=\boldsymbol{D}X'$ 是一个保持坐标三角形顶点不变的变换. 但由于它改变了三角形顶点的表示. 所以，它选择了一个新的单位点.

总之，(20)是一个可逆且保持共线性和交比不变的点变换，因此它属于射影变换. 对偶地，存在一个可逆且保持共点和交比不变的直线变换. 我们现在证明后一变换可由(20)导出，并且实际上与它一致.

考虑直线 x: $X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3=0$，用矩阵表出是

$$[X_1, X_2, X_3]\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0. \tag{22}$$

(20)将 x 变成直线 x'，它的方程是

$$[X_1, X_2, X_3]\cdot\rho\boldsymbol{E}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}=[X'_1, X'_2, X'_3]\cdot\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}=0.$$

诱导的直射变换为 $\tau[X_1', X_2', X_3']=[X_1, X_2, X_3]\cdot E^{-1}$，两边进行转置，变成更熟悉的形式

$$\tau\begin{bmatrix}X_1'\\X_2'\\X_3'\end{bmatrix}=(E^{-1})^T\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}, \tag{23}$$

或更简单地有：$\tau x'=(E')^T x$．它的逆为：

$$\tau' x=E^T x'. \tag{24}$$

例 16.11 射影变换

$$\rho X'=EX=\begin{bmatrix}1&3&5\\1&-2&3\\2&4&-3\end{bmatrix}X$$

将直线 l: $4x_1+3x_2-5x_3=0$ 变到

$$l': [4, 3, -5]\cdot E^{-1}X'=[4, 3, -5]\begin{bmatrix}-6&29&19\\9&-13&2\\8&2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=[-37, 67, 107]\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}$$

$$=-37x_1'+67x_2'+107x_3'=0.$$

因为我们把它看成图象移动的变换，也可以去掉撇号，写成 $37x_1-67x_2-107x_3=0$.

由(23)，诱导的直线变换写成

$$\delta\begin{bmatrix}X_1'\\X_2'\\X_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&9&8\\29&-13&2\\19&2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}.$$

当然，它得到同一条直线 l'.

(20)，(23) 类型的射影变换叫做直射变换．以后我们将考虑另一种叫做对射的射影变换．它把点变成直线，把直线变成点．

在习题 16.49 中，我们要求读者证明：

定理 16.9 若已知一个射影变换(形为 (20) 的直射变换)的四对对应点 (其中没有任意三点共线)，则这个射影变换被唯一确定．

11．直射变换的标准形式

考虑直射变换：

$$\rho X'=EX,\ |E|\neq 0. \tag{20}$$

若 $E=I$，则变换将平面上的每一点和每一直线都变成自身．此变换通称为恒等变换．假定 $E\neq I$，是否存在平面上个别的点和直线在变换下保持不变呢？这种点和直线如果存在的话，就称为变换的二重点和二重直线(或称为自对应的，不变的，固定的点和直线)．(20)的二重点是适合 $X'=X$ 的那些点；所以，它们满足

$$\rho X=EX$$

或

$$(E-\rho I)X=\begin{bmatrix}e_{11}-\rho&e_{12}&e_{13}\\e_{21}&e_{22}-\rho&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}-\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0.$$

方程组

$$\begin{cases}(e_{11}-\rho)x_1+e_{12}x_2+e_{13}x_3=0,\\ e_{21}x_1+(e_{22}-\rho)x_2+e_{23}x_3=0,\\ e_{31}x_1+e_{32}x_2+(e_{33}-\rho)x_3=0\end{cases} \tag{25}$$

有非零解的充要条件是

$$\phi(\rho)=\begin{vmatrix} e_{11}-\rho & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22}-\rho & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}-\rho\end{vmatrix}=0. \tag{26}$$

这就是所谓的矩阵E的特征方程,也叫做直射变换(20)的*特征方程*. 它或者有三个实根,或者有一个实根和一对共轭的虚根,我们所关心的只是直射变换有实特征根的情形. 设ρ_i是它的一个实根,则矩阵$\boldsymbol{E}-\rho_iI$是奇异的,且以ρ_i代替(25)式中的ρ所得的方程组有非零解. 比如说X^i: (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}),它是相应于特征根ρ_i的一个二重点.

在习题16.8中我们将证明:

定理16.10 若ρ_1, X^1; ρ_2, X^2; ρ_3, X^3是(20)的特征根和相应的二重点,则当$\rho_1\neq\rho_2\neq\rho_3$时,$X^1$, X^2, X^3不共线.

对于直射变换(20)的每一二重点X^i,都存在一条二重直线;当把上述论证用诱导的直射变换(23)时,就可推知它的存在性,且有:若ρ_i是(20)的特征根,则$\dfrac{1}{\rho_i}$便是(23)的特征根.

设X^1是(20)的二重点,并取它为新坐标三角形的一个顶点A_1: (1, 0, 0). 则因A_1不变,(20)的第一个方程化为$\rho x_1'=e_{11}x_1$,即$e_{12}=e_{13}=0$. 于是,当(20)的特征根是不同实根且相应的二重点取为坐标三角形的顶点时,(20)化为

(i) $$\rho x_1'=e_{11}x_1,\ \rho x_2'=e_{22}x_2,\ \rho x_3'=e_{33}x_3.$$

实现这个简化的变换是$\tau X=\boldsymbol{R}Y$, 这里Y的列是X^1, X^2, X^3的坐标. 把这个图象固定坐标移动的变换应用到(20)上去,便得:

$$\rho\boldsymbol{R}Y'=\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}Y,$$

或者回到(i)的记号:

$$\rho X'=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}X.$$

相似矩阵$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}$有相同的特征根,所以,

$$e_{11}=\rho_1, e_{22}=\rho_2,\ e_{33}=\rho_3.$$

于是(i)变为

$$\rho x_1'=\rho_1x_1,\ \rho x_2'=\rho_2x_2,\ \rho x_3'=\rho_3x_3. \tag{27}$$

我们称它为(20)的*标准形*.

例16.12 证明直射变换 $\rho X'=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}X$ 有不同二重点,并求其标准形.

解: 特征方程为

$$\phi(\rho)=\begin{vmatrix}1-\rho & 0 & -1\\ 1 & 2-\rho & 1\\ 2 & 2 & 3-\rho\end{vmatrix}=6-11\rho+6\rho^2-\rho^3=0,$$

特征根为：$\rho_1=1$, $\rho_2=2$, $\rho_3=3$. 当 $\rho=\rho_1=1$ 时，(25)变成

$$\begin{cases} \qquad\qquad - x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0, \end{cases}$$

其相应的二重点为 X^1: (1, −1, 0). 当 $\rho=\rho_2=2$ 时，(25)变成

$$\begin{cases} -x_1 \qquad -x_3=0, \\ x_1 \qquad +x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3=0, \end{cases}$$

其相应的二重点为 X^2: (2, −1, −2). 当 $\rho=\rho_3=3$ 时，(25)变成

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad -x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+2x_2 \qquad =0, \end{cases}$$

其相应的二重点为 X^3: (1, −1, −2).

二重直线是 $x^1=X^2X^3$: $2x_2-x_3=0$; $x^2=X^3X^1$: $x_1+x_2=0$ 和 $x^3=X^1X^2$: $2x_1+2x_2+x_3=0$.

取
$$R=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \text{则 } R^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{和}$$

$$\rho X'=R^{-1}CRX=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}X$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}X$$

标准形为：$\rho x_1'=x_1$, $\rho x_2'=2x_2$, $\rho x_3'=3x_3$(见习题16.9).

12. 平面透视和平射

假设(20)的特征方程(26)有单根 ρ_1 和二重根 ρ_2，这时按照(25)中 ρ_2 代 ρ 时所得系数矩阵的秩是2还是1，将出现两种情况，导出两种不同的标准形. 在习题16.10中说明了秩为2的情况. 当秩为1时，直射变换叫做平面透射. 我们举下例说明之.

例 16.13　求直射变换 $X'=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}X$ 的标准形.

解：特征方程为

$$\phi(\rho)=\begin{vmatrix} 2-\rho & 2 & 1 \\ 1 & 3-\rho & 1 \\ 1 & 2 & 2-\rho \end{vmatrix}=(5-\rho)(1-\rho)^2=0,$$

特征根是：$\rho_1=5$, $\rho_2=\rho_3=1$.

当 $\rho=\rho_1=5$ 时，(25)变成

$$\begin{cases}-3x_1+2x_2+\ x_3=0,\\ \ \ x_1-2x_2+\ x_3=0,\\ \ \ x_1+2x_2-3x_3=0,\end{cases}$$

相应的二重点是: X': (1, 1, 1).

当 $\rho=\rho_2=1$ 时, (25)变成:

$$\text{(i)}\qquad \begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=0,\end{cases}$$

系数矩阵 $\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{bmatrix}$ 的秩 $r=1$. 所以直线 x': $x_1+2x_2+x_3=0$ 上每一点都是二重点. x' 以及不在 x' 上的点 X' 和 x' 上每一点的连线都是二重直线. 但是, 这些二重直线还有区别. x' 是二重点的直线.

取 X' 和直线 x' 上的两个不同点, 比如 X^2: (1, 0, −1), X^3: (1, −1, 1) 为新坐标三角形的顶点(见图 16-4). 则

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&1\end{bmatrix},\ R^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&-2\\1&-2&1\end{bmatrix},$$

$$\rho X'=R^{-1}ERX=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}X,$$

所求的标准形是:

$$\rho x_1'=\rho_1x_1,\ \rho x_2'=\rho_2x_2,\ \rho x_3'=\rho_2x_3.$$

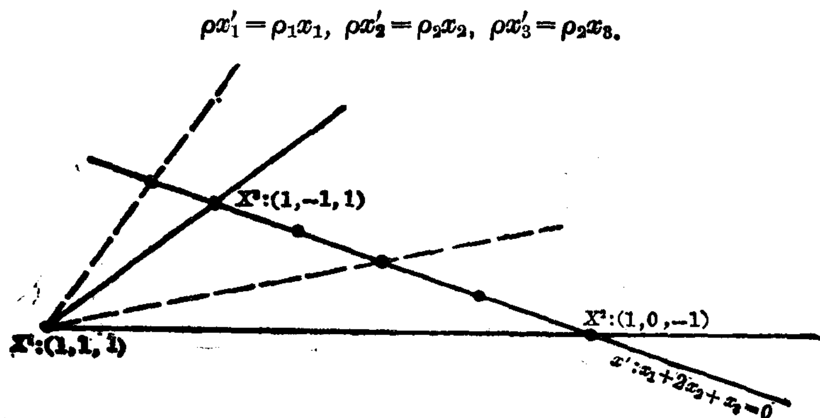


图 16-4

所以平面透射是一个非恒等直射变换, 它有一条全部由二重点组成的二重直线 k 和一个二重点 K (不在 k 上)上的二重线束. 直线 k 叫做透射轴. 点 K 叫透射中心.

假设(20)的特征方程(26)有三重根 ρ_1, 按照 (25) 中 ρ_1 代 ρ 时系数矩阵的秩是 2 还是 1, 也将出现两种情况. 在习题 16.11 中说明了秩是 2 的情况. 当秩是 1 时, 直射叫做平射. 我们举下例说明之:

例 16.14 求直射 $\rho X'=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -6\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}X$ 的标准形.

解: 特征方程为

$$\phi(\rho)=\begin{vmatrix}2-\rho & 2 & 3\\ -2 & -3-\rho & -6\\ 1 & 2 & 4-\rho\end{vmatrix}=(1-\rho)^3=0,$$

特征根是 $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1$.

当 $\rho=\rho_1=1$ 时,(25)变成

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\ -2x_1-4x_2-6x_3=0,\\ x_1+2x_2+3x_3=0,\end{cases}$$

秩为 $r=1$. 于是存在二重点的直线 x^3: $x_1+2x_2+3x_3=0$. 从诱导的直射变换

$$\delta x'=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 5 & -2\\ -3 & 6 & -2\end{bmatrix}x$$

或由习题 16.9 的注可以发现,存在 X': (1, −2, 1) 上的二重直线束.

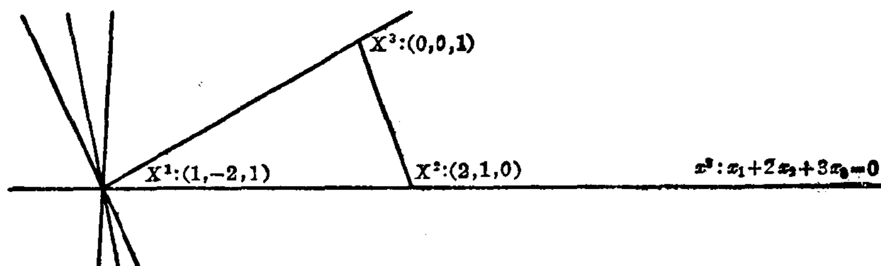


图 16-5

取点 X^1 和 x^3 上任一点,比如 X^2: (2, −1, 0), 以及平面上任一点,比如 X^3: (0,0,1), 使得 X^1, X^2, X^3 不共线,以 X^1, X^2, X^3 为新坐标三角形的顶点,则

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},$$

其标准形为

$$\rho x_1'=x_1+3x_3,\ \rho x_2'=x_2,\ \rho x_3'=x_3.$$

所以,平射是一个非恒等直射,它有一条二重点直线 k(称为轴)和点 K(在 k 上)上的二重直线束, K 叫做它的中心.

13. 对 射

方程

$$\rho\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ C=[C_{ij}]\ (i=1,\ 2,\ 3),\ |C|\neq 0 \tag{28}$$

确定在平面上的点 $X=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 和直线 x: $[X_1,\ X_2,\ X_3]$ 之间的一一对应，这个对应称为对射. 我们可以把 (28) 看作是将射影平面上的点 X 变到这个平面上的直线 x 的一个变换，这个变换的逆变换为

$$\delta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C^{-1}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}, \tag{29}$$

它将 x 变回到 X.

设 P: (y), Q: (z) 是两个不同点，在(28)下，它们的对应元素各自记为 p: $[Y]$, q: $[Z]$. 容易推得直线 PQ 上的另一点 R: $(y+\lambda z)$ 的对应元素 r: $[Y+\lambda Z]$, 它是 $p\cdot q$ 上的另一直线. 所以对射(28)将点上的直线 s 变到直线上的点 S(请读者验证: 在(28)下，交比也是不变的，从而对射是一个射影变换). 一般地，点 S 和直线 s 并不是互相对应的(见习题 16.54), 所以，与直线相类似，对射(28)也可以诱导出另一个一般说来不同于(28)的变换(对射)，这个变换将平面上的直线变到平面上的点.

为了寻找诱导的对射的方程，假设此对射将直线 $\{X'x\}=0$ 变到点 $\{Xx'\}=0$ (这里，带撇表示固定坐标). 在(28)下，$\{X'x\}=0$ 变成

$$[X_1',\ X_2',\ X_3']\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[X_1',\ X_2',\ X_3']C^{-1}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=0.$$

取转置:

$$[x_1,\ x_2,\ x_3]\begin{bmatrix}X_1'\\X_2'\\X_3'\end{bmatrix}=[X_1,\ X_2,\ X_3]\ (C^{-1})^T\begin{bmatrix}X_1'\\X_2'\\X_3'\end{bmatrix}=0,$$

我们得到

$$\delta\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=(C^{-1})^T\begin{bmatrix}X_1'\\X_2'\\X_3'\end{bmatrix},$$

或者省略撇号

$$\delta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(C^{-1})^T\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}, \tag{30}$$

这就是诱导的变换. 它的逆变换是:

$$\tau\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=C^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}. \tag{31}$$

若对射(28)的矩阵 C 为对称矩阵，则称它是极对射或配极变换.

由于配极变换(29)和(30)是一致的，所以配极变换不仅把点 P 变到直线 p, 而且也把 P 上线束中的直线 x 变到 p 上点列中的点 X.

配极变换:

$$\rho\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ \sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C^{-1}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}\tag{32}$$

(这里,$C=[C_{ij}]$, $C_{ij}=C_{ji}$, $|C|\neq 0$)的重要性在于：尽管点P一般不在它的对应元素上，然而，在它们的对应元素上的一切点X的轨迹是一条二次曲线，称为*点素二次曲线*．换言之，每一点到直线的配极变换确定一条点素二次曲线．对偶地，每一直线到点的配极变换确定一条*线素二次曲线*(例题见习题16.12)．

在下一章，我们将更详细地研究二次曲线．在那里，我们将继续沿用在第八章中引入的二次曲线的定义．

§16.2　问题及其解

16.1　证明．直线o上任意四点的交比与此直线上建立的坐标系无关．

证明：给定四个点P, Q, R, S，假设对于o上由A: (a), B: (b), C: $(a+b)$组成的坐标系，有P: p, Q: q, R: r, S: s; 对于o上由A', B', C'组成的另一坐标系，有P: p', Q: q', R: r', S: s'; 且对于第一个坐标系有A': u, B': v，则有

$$P:\ (pa+b)$$

和

$$P:\ (p'(ua+b)+(va+b))=\left(\frac{p'u+v}{1+p'}a+b\right).$$

因而

$$p=\frac{p'u+v}{1+p'}.$$

同理，

$$q=\frac{q'u+v}{1+q'},\quad r=\frac{r'u+v}{1+r'},\quad s=\frac{s'u+v}{1+s'}.$$

于是

$$p-r=\frac{p'u+v}{1+p'}-\frac{r'u+v}{1+r'}=\frac{(u-v)(p'-r')}{(1+p')(1+r')}.$$

同理，

$$p-s=\frac{(u-v)(p'-s')}{(1+p')(1+s')},\quad q-s=\frac{(u-v)(q'-s')}{(1+q')(1+s')},\quad q-r=\frac{(u-v)(q'-r')}{(1+q')(1+r')}.$$

所以

$$(p,\ q;r,\ s)=\frac{(p-r)(q-s)}{(p-s)(q-r)}=\frac{(p'-r')(q'-s')}{(p'-s')(q'-r')}=(p',\ q';r',\ s').$$

16.2　证明：若两射影点列的三对对应点的连线共点，则这两射影点列是透视的．

证明：设P: p, P': p'; Q: q, Q': q'; R: r, R': r'是三对对应点，它们的连线$a=PP'$, $b=QQ'$, $C=RR'$在点O上．设S: s; S': s'是射影的另一对对应点．令$OS=d$, $OS'=d'$．

因为

$$(a,\ b;c,\ d)=(p,\ q;r,\ s)=(p',\ q';r',\ s')=(a,\ b;c,\ d'),$$

所以

$$d=d'.$$

所以　S和S'通过O成透视．

16.3　求把点1, 3, ∞分别变到点5, 4, ∞的射影方程．

解：所求方程具有形式

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

当 $x=\infty$ 时，$x'=\frac{a}{c}=\infty$，所以 $c=0$.

方程可化为 $$dx'-ax-b=0.$$

把 $x=1,\ x'=5;\ x=3,\ x'=4$ 分别代入方程，得

$$5d-a-b=0 \quad 和 \quad 4d-3a-b=0.$$

两式相减，得 $$d+2a=0;$$

取 $d=-2$，得 $a=1$. $b=5d-a=-11$,

$$\therefore \quad 所求方程为 \quad x'=\frac{x-11}{-2}.$$

16.4 证明：双曲型射影的两个二重点和一对对应点的交比 K 与这对对应点的选择无关.

证明：考虑双曲型射影

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}, \tag{3}$$

它的二重点是 M：$x_1=\frac{a-d+\theta}{2c}$

和 $$N:\ x_2=\frac{a-d-\theta}{2c},$$

其中 $\theta=\sqrt{(d-a)^2+4bc}$.

设 $P:p$ 和 $P':p'$ 是一对对应点，则

$$K=(M,\ N;\ P,\ P')=(x_1,\ x_2;\ p,\ p')$$
$$=\frac{x_1-p}{x_1-p'}\cdot\frac{x_2-p'}{x_2-p}=\frac{pp'-x_1p'-x_2p+x_1x_2}{pp'-x_1p-x_2p'+x_1x_2}.$$

由(3)式可得 $$pp'=\frac{ap-dp'+b}{c};$$

又因为 $$x_1x_2=-\frac{b}{c},$$

所以 $$K=\frac{\dfrac{ap-dp'+b}{c}-p'\dfrac{a-d+\theta}{2c}-p\dfrac{a-d-\theta}{2c}-\dfrac{b}{c}}{\dfrac{ap-dp'+b}{c}-p\dfrac{a-d+\theta}{2c}-p'\dfrac{a-d-\theta}{2c}-\dfrac{b}{c}}$$
$$=\frac{(p-p')(a+d+\theta)}{(p-p')(a+d-\theta)}=\frac{a+d+\theta}{a+d-\theta}.$$

显然，K 的值只与(3)式中的参数 $a,\ b,\ c,\ d$ 有关，而与用来求得 K 值的对应点对 P, P' 无关.

16.5 推出抛物型射影的标准型：

$$x'=x+p,\ p=\frac{b}{a} \quad (c=0),$$

$$\frac{1}{x'-x_1}=\frac{1}{x-x_1}+p,\ \ p=\frac{-c}{cx_1-a} \quad (c\neq 0).$$

解：若 $c=0$，则 $b\neq 0,\ a=d$. 射影方程为 $x'=x+\frac{b}{a}$

或 $$x'=x+p,\ p=\frac{b}{a}.$$

若 $c\neq0$, 则 $(d-a)^2+4bc=0$, 二重点为 $x_1=\frac{a-d}{2c}$; 因而 $a-d=2cx_1$. 因为 $(a-d)^2=-4bc$ 所以, $b=-cx_1^2$. 所以

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax-cx_1^2}{cx+a-2cx_1},$$

$$xx'+\frac{a}{c}x'-2x'x_1-\frac{a}{c}x+x_1^2=0,$$

$$(x'-x)\left(x_1-\frac{a}{c}\right)-(x-x_1)(x-x_1)=0,$$

$$\frac{x'-x}{(x'-x_1)(x-x_1)}=\frac{1}{x_1-\frac{a}{c}}$$

和

$$\frac{1}{x'-x_1}-\frac{1}{x-x_1}=\frac{-1}{x_1-\frac{a}{c}}=p.$$

即如所求:

$$\frac{1}{x'-x_1}=\frac{1}{x-x_1}+p,\quad p=\frac{-c}{cx_1-a}.$$

16.6 证明: 一条直线到自身上的射影变换 $\tau: x'=\frac{ax+b}{cx+d}$ 是一个对合的充要条件为 $a+d=0$.

证明: 假定 τ 是一个把 $P: p$ 变为 $P': p'(P'\neq P)$ 的对合, 则 $\tau^{-1}: x=\frac{ax'+b}{cx'+d}$ 把 P' 变回到 P, 于是有

$$cpp'+dp'-ap-b=0 \quad 和 \quad cpp'-ap'+dp-b=0.$$

两式相减得

$$(a+d)(p-p')=0.$$

因为 $P'\neq P$, 所以 $p'-p\neq0$; 于是 $a+d=0$.

反之, 假定 $a+d=0$, 则 $\tau: x'=\frac{ax+b}{cx-a}$. 留给读者证明: τ^2 是恒等变换, 因而 τ 是一个对合.

16.7 证明: 变换 $\rho X'=\boldsymbol{E}X$, $|\boldsymbol{E}|\neq0$ 保持共线性.

证明: 设 (y), (z), $(y+\lambda z)$ 是不同的共线点. 在这个变换下, 它们分别变为 $\boldsymbol{E}Y$, $\boldsymbol{E}Z$ 和

$$\boldsymbol{E}\begin{bmatrix}y_1+\lambda z_1\\ y_2+\lambda z_2\\ y_3+\lambda z_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}+\lambda\boldsymbol{E}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}Y+\lambda\boldsymbol{E}Z,$$

显然, 它们是共线点.

16.8 证明: 若 ρ_1, X_1; ρ_2, X_2; ρ_3, X_3 是 $\rho X'=\boldsymbol{E}X$ 的特征根和相应的二重点, 则当 $\rho_1\neq\rho_2\neq\rho_3$ 时, X_1, X_2, X_3 不共线.

证明: 假设 $\rho_1\neq\rho_2\neq\rho_3$ 而 X_1, X_2, X_3 共线, 则存在不全为 0 的常数 α_1, α_2, α_3, 使得:

(i) $$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3=0.$$

(i)式的左边乘以 $\boldsymbol{E}$, 并利用 $\boldsymbol{E}X_i=\rho_iX_i(i=1, 2, 3)$ 得:

(ii) $$\alpha_1\boldsymbol{E}X_1+\alpha_2\boldsymbol{E}X_2+\alpha_3\boldsymbol{E}X_3=\alpha_1\rho_1X_1+\alpha_2\rho_2X_2+\alpha_3\rho_3X_3=0.$$

(ii)式左边乘以 $\boldsymbol{E}$，得:

(iii) $$\alpha_1\rho_1^2X_1+\alpha_2\rho_2^2X_2+\alpha_3\rho_3^2X_3=0.$$

把(i)，(ii)，(iii)式写成矩阵形式

(iv) $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3\\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \rho_3^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1X_1\\ \alpha_2X_2\\ \alpha_3X_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\alpha_1X_1\\ \alpha_2X_2\\ \alpha_3X_3\end{bmatrix}=0.$$

其中 $|\boldsymbol{B}|=(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1)\neq0$，所以 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在. (iv)式边乘以 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\alpha_1X_1\\ \alpha_2X_2\\ \alpha_3X_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}\begin{bmatrix}\alpha_1X_1\\ \alpha_2X_2\\ \alpha_3X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1X_1\\ \alpha_2X_2\\ \alpha_3X_3\end{bmatrix}=0.$$

因此 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$，与假设矛盾. 所以 X_1, X_2, X_3 不共线.

16.9 研究例题16.12中的点变换

$$\rho X'=\boldsymbol{E}X=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}X$$

诱导的直线变换的二重元素.

解: 由 $\boldsymbol{E}^{-1}=\begin{bmatrix}2/3 & -1/3 & 1/3\\ -1/6 & 5/6 & -1/3\\ -1/3 & -1/3 & 1/3\end{bmatrix}$，诱导的直线变换是

$$\sigma\boldsymbol{x}'=(\boldsymbol{E}^{-1})^T\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2/3 & -1/6 & -1/3\\ -1/3 & 5/6 & -1/3\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}.$$

对于(25)式，有方程组

(i) $$\begin{cases}(2/3-\sigma)X_1 \quad -1/6X_2 \quad -1/3X_3=0,\\ -1/3X_1+(5/6-\sigma)X_2 \quad -1/3X_3=0,\\ 1/3X_1 \quad -1/3X_2+(1/3-\sigma)X_3=0,\end{cases}$$

它有非平凡解的充要条件是

$$\phi'(\sigma)=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}-\sigma & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}-\sigma & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\sigma\end{vmatrix}=0.$$

$\phi'(\sigma)=0$ 的根是$\boldsymbol{E}$的特征方程 $\phi(\rho)=0$ 的根的倒数 $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\frac{1}{2}$, $\sigma_3=\frac{1}{3}$.

当 $\sigma=\sigma_1=1$ 时，(i)式变为: $\begin{cases}-2X_1-X_2-2X_3=0,\\ -2X_1-X_2-2X_3=0,\\ X_1-X_2-2X_3=0,\end{cases}$ 相应的二重直线为 x^1: $[0, 2, -1]$

或 x^1: $2x_2-x_3=0$.

类似地，当 $\sigma=\sigma_2=1/2$, $\sigma=\sigma_3=1/3$ 时，二重直线各为: x^2: $x_1+x_2=0$ 和 x^3: $2x_1+2x_2$

$+x_3=0$.

注：由 $\rho X=EX$（ρ 和 X 是 E 的特征根和相应的二重点）可得 $\frac{1}{\rho}X=E^{-1}X$；反之亦然. 所以 X 是 E^{-1} 的相应的二重点的充要条件是：X 是 E 的相应的二重点. 对偶地，x 是 $(E^T)^{-1}$ 相应的二重直线的充要条件是：x 是 E^T 的相应的二重直线. 因为 E^T 的特征根就是 E 的特征根，所以上述二重直线可以根据 E 的特征根从 $(E^T-\rho I)x=0$ 更容易地求得. 例如，根据特征根 $\rho=\rho_3=3$，从

$$(E^T-\rho I)x=\begin{bmatrix}1-\rho & 1 & 2\\ 0 & 2-\rho & 2\\ -1 & 1 & 3-\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0$$

求得 x^3：[2, 2, 1]，这和前面的结果一致.

16.10　求 $\rho X'=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & -2 & 3\end{bmatrix}X$ 的标准形.

解：特征方程是

$$\phi(\rho)=\begin{vmatrix}2-\rho & 1 & -1\\ 0 & 2-\rho & -1\\ -3 & -2 & 3-\rho\end{vmatrix}=(5-\rho)(1-\rho)^2=0,$$

特征根是 $\rho_1=5$, $\rho_2=\rho_3=1$.

当 $\rho=\rho_1=5$ 时，(25)式变为

$$\begin{cases}-3x_1+x_2-x_3=0,\\ \qquad -3x_2-x_3=0,\\ -3x_1-2x_2-2x_3=0,\end{cases}$$

相应的二重点：X^1：$(-4,\ -3,\ 9)$.

当 $\rho=\rho_2=1$ 时，(25)式变为秩 $r=2$ 的方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\ \qquad x_2-x_3=0,\\ -3x_1-2x_2+2x_3=0,\end{cases}$$

秩 $r=2$. 相应的二重点是 X^2：(0, 1, 1).

这个变换有两个二重点 X^1 和 X^2（X^2 计算两次）. 对偶地，有两条二重直线——$x^3=X^1X^2$：$3x_1-x_2+x_3=0$ 和 x^1：$x_1+x_2-x_3=0$——后者与利用诱导的直线变换

$$\sigma x'=\begin{bmatrix}4 & 3 & 6\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}x \text{ 或从 } \sigma x'=E^Tx=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}x$$

求得的一致.

取 X^1, X^2 和 x^1 上的任意其它点，比如说 X^3：$(1,\ -2,\ -1)$ 为新坐标三角形的顶点，则

$$R=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ -3 & 1 & -2\\ 9 & 1 & -1\end{bmatrix},\ R^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 21 & 5 & 11\\ 12 & -4 & 4\end{bmatrix}.$$

所以标准形为

$$\rho x_1' = 5x_1,\ \rho x_2' = x_2 - x_3,\ \rho x_3' = x_3.$$

16.11 求 $\rho X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} X$ 的标准形.

解: 特征方程是

$$\phi(\rho) = \begin{vmatrix} -\rho & 1 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 \\ 1 & -3 & 3-\rho \end{vmatrix} = (1-\rho)^3,$$

特征根是 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

当 $\rho = \rho_1 = 1$ 时, (25)式变为

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

其秩 $r = 2$, 相应的二重点是 X^1: (1, 1, 1).

于是有唯一一个二重点(计算三次)和唯一一条二重直线, x^3: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ (计算三次); 因为 X^1 在 x^3 上, 取 X^1 和 x^3 上另一点 X^2: (2, 1, 0) 以及不在 x^3 上的第三点 X^3: (0, 0, 1) 作为新坐标三角形的顶点, 则

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

所以标准形为

$$\rho x_1' = x_1 - x_2 + 2x_3,\ \rho x_2' = x_2 - x_3,\ \rho x_3' = x_3.$$

16.12 推出由配极变换

$$\rho \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{及其逆} \quad \sigma \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

所确定的(a)点素二次曲线和(b)线素二次曲线的方程.

解: (a) 点素二次曲线

配极变换把点 (x_1, x_2, x_3) 变到直线 $[X_1, X_2, X_3]$. 因为我们要求这个点在这条直线上, 故必有

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = 0.$$

现在, 在配极变换下,

$$[x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ 变为 } [x_1, x_2, x_3] \cdot \boldsymbol{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

把它展开, 得

$$[x_1,\ x_2,\ x_3]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=[x_1,\ x_2,\ x_3]\begin{bmatrix} c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3 \\ c_{12}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3 \\ c_{13}x_1+c_{23}x_2+c_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

$$=c_{11}x_1^2+c_{22}x_2^2+c_{33}x_3^2+2c_{12}x_1x_2+2c_{13}x_1x_3+2c_{23}x_2x_3=0.$$

这就是配极变换所确定的点素二次曲线的方程.

(b) **线素二次曲线**

配极变换的逆把直线 $[X_1,\ X_2,\ X_3]$ 变为点 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. 因为这条直线在这点上,必有 $X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3=0$.

在配极变换的逆变换下,

$$[X_1,\ X_2,\ X_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \text{ 变为 } [X_1,\ X_2,\ X_3]C^{-1}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=0,$$

这就是线素二次曲线的方程.

注意:一条给定的点素二次曲线

$$[x_1,\ x_2,\ x_3]C\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

的直线方程是

$$[X_1,\ X_2,\ X_3]C^{-1}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=0,$$

而一条给定的线素二次曲线

$$[X_1,\ X_2,\ X_3]C\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=0$$

的点方程是

$$[x_1,\ x_2,\ x_3]C^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0.$$

§16.3 补 充 题

16.13 确定下列变换的方程.

(a) 把 0, 1, 2 分别变为 0, 4, 3;

(b) 把 0, 1, 2 分别变为 2, 1, 3;

(c) 把 0, 2, 5 分别变为 9, 1, 4;

(d) 把 0, 1, ∞ 分别变为 1, ∞, 0;

(e) 把 2, 3, 4 分别变为 2, 3, 5;

(f) 把 1, 2, ∞ 分别变为 −1, −5, 3.

答案：(a) $x'=\frac{12x}{5x-2}$; (b) $x'=\frac{7x-8}{3x-4}$;

(c) $x'=\frac{5x-9}{x-1}$; (d) $x'=\frac{1}{1-x}$;

(e) $x'=\frac{x+6}{-x+6}$, (f) $x'=\frac{3x-1}{x-3}$.

16.14 求习题 16.13 中各变换的实二重点，并证明：(a), (b), (e), (f) 是双曲型；(c) 是抛物型；(d) 是椭圆型.

16.15 习题 16.13(e) 中的变换有二重点 $M:2$ 和 $N:3$，并且把 $P:4$ 变换为 $P':5$. 求另外两对对应点 Q, Q'; R, R' 并证明：

$$(M, N; P, P')=(M, N; Q, Q')=(M, N, R, R').$$

16.16 求习题 16.13 中的双曲型和抛物型射影的标准形.

答案：(a) $\frac{x'}{x'-\frac{14}{5}}=-6\frac{x}{x-\frac{14}{5}}$; (e) $\frac{x'-2}{x'-3}=\frac{3}{4}\frac{x-2}{x-3}$;

(b) $\frac{x'-1}{x'-\frac{8}{3}}=-4\frac{x-1}{x-\frac{8}{3}}$; (f) $\frac{x'-3+2\sqrt{2}}{x'-3-2\sqrt{2}}=-\frac{x-3+2\sqrt{2}}{x-3-2\sqrt{2}}$.

(c) $\frac{1}{x'-3}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}$;

16.17 已知射影变换 τ: $x'=\frac{ax+b}{cx+d}$，求它的逆变换 τ^{-1} 并验证 $\tau\cdot\tau^{-1}=\tau^{-1}\cdot\tau$ 是恒等变换.

16.18 写出习题 16.13 中每个变换的逆变换.

部分答案：(a) $x=\frac{2x'}{5x'-12}$; (b) $x=\frac{4x'-8}{3x'-7}$;

(f) $x=\frac{3x'-1}{x'-3}$.

16.19 已知射影变换 τ_1: $x'=\frac{ax+b}{cx+d}$, τ_2: $x'=\frac{ex+f}{gx+h}$, 证明：(a) $\tau_2\cdot\tau_1$ 是射影变换；(b) $\tau_1\cdot\tau_2$ 是射影变换；(c) 一般地 $\tau_1\cdot\tau_2\neq\tau_2\cdot\tau_1$.

提示：对于(a)，写出 τ_1: $x'=\frac{ax+b}{cx+d}$, τ_2: $x''=\frac{ex'+f}{gx'+h}$，求 $\tau_2\cdot\tau_1$: $x''=\frac{a'x+b'}{c'x+d'}$. 记住它的射影变换的充要条件是 $a'd'-b'c'\neq 0$.

16.20 对于习题 16.19 中的 $\tau_2\cdot\tau_1$，证明 $a'd'-b'\cdot c'=(ad-bc)(eh-fg)$.

16.21 假定 τ_1 和 τ_2 是有相同二重点 M, N 且特征不变量分别为 K_1, K_2 的双曲型射影，利用标准型证明：$\tau_2\cdot\tau_1$ 是双曲型的，它的二重点是 M, N，特征不变量是 $K_2\cdot K_1$. 因而 $\tau_1\cdot\tau_2=\tau_2\cdot\tau_1$.

16.22 考察有相同的二重点 M 且参数分别为 p_1 和 p_2 的两个抛物型射影 τ_1 和 τ_2 的乘积.

16.23 确定有两对互逆点 1, −1; −2, 3 的对合.

答案：$xx'+5(x+x')+1=0$.

16.24 假定一个对合的两对互逆点由二次方程 (i) $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 和 (ii) $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ 的根给出. (i) 的根记为 x_1, x_1', 那么 $x_1\cdot x_1'=\frac{c_1}{a_1}$, $x_1+x_1'=-\frac{b_1}{a_1}$. 证明对合的方程为 $\begin{vmatrix} xx' & x+x' & 1 \\ c_1 & -b_1 & a_1 \\ c_2 & -b_2 & a_2 \end{vmatrix}=0$.

16.25 求由 $2x^2-x-1=0$ 和 $x^2+3x+2=0$ 给出的互逆对所确定的对合方程.

答案: $7xx'+5(x+x')+1=0$.

16.26 若习题 16.24 的二次方程有一公共根,将会怎样?

16.27 确定其二重点为 1, -2 的对合.

答案: $2xx'+(x+x')-4=0$.

16.28 证明定理 16.6.

提示: 证明由 $H(x_1, x_2; x, x')$ 可推得 $2xx'-(x_1+x_2)\cdot(x+x')+2x_1x_2=0$.

16.29 已知一条直线上的两对点 p, p'; q, q', 证明在这两条直线上存在唯一一对点 x_1, x_2, 分别调和分隔这两对点.

16.30 已知一条直线上的两对点: 3, 18; -4, $-\frac{2}{3}$, 找出习题 16.29 所指明的那对点.

16.31 利用习题 16.24 证明: 在由 q_1: $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 和 q_2: $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ 确定的对合中,任何别的互逆对由 $q_1+\lambda q_2$ 给出(λ 取某一数值).

16.32 利用图 16-3 证明笛沙格双三角形定理.

16.33 根据例 16.8(b) 中选择的坐标系,证明巴普斯定理.

16.34 在图 3-1(*a*) 中, 取 A: (1, 0, 0), B: (0, 1, 0), C: (0, 0, 1), P: (1, 1, 1), 求 Q, R, S 的相对坐标和完全四点形各边的方程.

16.35 证明: 若三个不同的共线点分别在一个完全四线形的对角三角形的三条边上, 则它们关于四线形顶点的调和共轭点共线.

提示: 利用图 3-1(*b*), 取 a: [1, 0, 0], b: [0, 1, 0], c: [0, 0, 1], P: [1, 1, 1].

16.36 已知一个三角形 ABC 和两点 A', B', 找出点 C', 使得 AA', BC', $B'C$ 共点和 AC', BB', CA' 共点; (a) 证明: AB', BA', CC' 也共点; (b) 保证 AB', BC', CA' 共点的附加条件是什么?

提示: 在图 16-3 中, 对调 C' 和 B', 使得 AA', BC', CB' 共点于 P, 只要 $abc=1$, 则 AC', BB', CA' 也共点.

答案: (b) $a=c$.

16.37 P, Q 是定直线 r 上的不同点, A, B 是不在 r 上的不同点. 设 $R=AP\cdot BQ$, $S=AQ\cdot BP$. 证明: $T=AB\cdot RS$ 是定点, 即 T 与 P, Q 的选择无关.

提示: 取 r: $x_1-x_2=0$, P: (1, 1, a), Q: (1, 1, b), A: (1, 0, 0), B: (0, 1. 0).

16.38 叙述并证明习题 16.37 的对偶.

16.39 证明: 若 X 是四点形 $PQRS$ 的边 PR 上任一点, Y 是边 QS 上任一点, 则 $T=QX\cdot PY$, $U=SX\cdot RY$, $B=PS\cdot QR$ 共线.

16.40 (a) 证明: 点 P: (a) 关于坐标三角形的极线方程是

$$p:\ \frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3}=0.$$

(b) 证明：点 P：(a) 关于坐标三角形每两边的极线构成另一个三角形.

(c) 证明：(b)中的两个三角形通过 P 和 p 成透视.

16.41 证明习题 4.2 及注中的定理.

提示：取 ABC 为坐标三角形，在直线 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 上取 A', B', C'.

16.42 若在不同直线上有 $H(A, B; C, D)$ 和 $H(A', B'; C', D)$，则 AA', BB', CC', 共点.

16.43 证明：形如 (20) 式的射影变换由给定的四对对应点(无任何三点共线)唯一确定.

提示：因为方程(20)可以用 e_{ij} 中任何一个去除，所以方程只有 8 个基本常数. 我们可以取任一点的坐标为 1，所以把一点 A 变为它的对应点 A' 就给出了(20)式中 8 个基本常数的两个独立关系. 当然，也可能出现这样的情况，给定的点对使得上面选择的 e_{ij} 为 0. 从而引出矛盾，这时必须另选 e_{ij} 重新开始(为什么我们能肯定有解?).

16.44 取绝对坐标 B_1: (1, 1, 2), B_2: (3, −2, 4), B_3: (5, 3, −3); B_4: (9, 2, 3), 写出变换(16)和(17)的方程. 把这些方程和例 16.7 中的方程联合起来，得到：

$$\tau'\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}109&-23&14\\-11&65&-82\\-3&-10&144\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\qquad(19)$$

和

$$\tau\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}140&52&16\\30&258&144\\5&19&112\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=D\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}.\qquad(20)$$

验证 $\boldsymbol{C}$ 的列是坐标三角形 $A_1A_2A_3$ 关于坐标系 B_1, B_2, B_3; B_4 的坐标.

16.45 求把例 16.7 中的 A_1, A_2, A_3; A_4 分别变为习题 16.43 中的 B_1, B_2, B_3; B_4的射影变换. 证明完全四点形 $A_1A_2A_3A_4$ 的对边点变为 $B_1B_2B_3B_4$ 的对边点(不经过计算).

答案：$\rho X'=\begin{bmatrix}243&-42&27\\-61&134&11\\157&-38&133\end{bmatrix}X.$

16.46 对于变换.

$$\rho\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&-1&3\\3&2&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

证明：

(a) 它是奇异的，即 $|C|=0$;

(b) 点 P: (−2, −1, 1) 没有像，即变为 (0, 0, 0);

(c) 平面上其它的每一点都变为直线 l': $x_1+x_2-x_3=0$ 上的一点;

(d) 直线 l: $x_1-x_2+x_3=0$ 上的点(除去 P)变为 l' 上的点 (4, 1, 5);

(e) 平面上其它直线都变为直线 l'.

16.47 证明变换 $\rho X'=EX$, $|E|\neq 0$ 保持交比不变.

16.48 求下列直射的二重元素和标准形:

(a) $\rho X'=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}X$; (c) $\rho X'=\begin{bmatrix}6 & 6 & -2\\ -2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}X$;

(b) $\rho X'=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}X$; (d) $\rho X'=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ -3 & -3 & -5\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}X$;

(e) $\rho X'=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ -10 & 7 & 2\\ -5 & 2 & 4\end{bmatrix}X$.

答案: (a) 二重点: (3, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 0, 1).

标准形:

$$\rho X'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}X.$$

二重直线: $x_1-x_2-x_3=0$, $x_1-x_3=0$, $x_1+2x_2-7x_3=0$.

(b) 二重点: $x_1-x_2-x_3=0$ 上的全体点; (1, 1, 2).

二重直线: (1, 1, 2)上的全体直线; $x_1-x_2+x_3=0$.

标准形:

$$\rho X'=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}X.$$

(c) 二重点: (2, −1, 0), (1, −1, −1).

二重直线: $x_1+2x_2=0$, $x_1+2x_2-x_3=0$.

标准形:

$$\rho X'=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}X.$$

(d) 二重点: (1, −2, 1).

二重直线: $x_1-x_3=0$.

标准形:

$$\rho X'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}X.$$

(e) 二重点: $5x_1-2x_2-x_3=0$ 上的全体点.

二重直线: (1, 2, 1)上的全体直线,

标准形:

$$\rho X'=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}X.$$

16.49 求下列直射:

(a) A: (1, 0, 0) 变为 P: (−1, 1, 1), B: (0, 1, 0) 变为 Q: (1, −1, 1), C: (0, 0, 1) 变为 R: (1, 1, −1), D: (1, 1, 1) 变为 S: (1, 2, 3).

(b) A 变为 T: (−3, 1, 1), B 变为 U: (1, −2, 1), C 变为 R, D 不变.

(c) A 变为 P, B 变为 Q, C 变为 R, D 不变.

(d) A 变为 B, P 变为 Q, F: (1, 0, −1) 变为 G: (0, 1, −1), E: (1, −1, 0) 不变.

(e) B 变为 P, G 变为 Q, E 变为 H(2, 0, −1), R 不变.

答案: (a) $\rho X'=\begin{bmatrix}-5&4&3\\5&-4&3\\5&4&-3\end{bmatrix}X.$ (b) $\rho X'=\begin{bmatrix}-9&4&6\\3&-8&6\\3&4&-6\end{bmatrix}X.$

(c) $\rho X'=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}X.$ (d) $\rho X'=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}X.$

(e) $\rho X'=\begin{bmatrix}3&-1&0\\1&1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}X.$

16.50 在习题 16.49(b)—(e) 中, 有两个三角形通过不变点成透视(例如, 在(d)中, 三角形 APF 和三角形 BQG 通过 E 成透视). 这种直射成透视直射. 证明: 二重元素由在二重(不变)点上的二直线束和方程为: (b) $3x_1+4x_2+6x_3=0$, (c) $x_1+x_2+x_3=0$, (d) $x_1-x_2=0$, (e) $x_1-x_2=0$ 的一条二重点组成. 验证每条二重点的直线是相应透视三角形的轴.

16.51 在习题 16.49(b)～(d) 中, 验证: 不变点不在二重点的直线上, 即这种直射是透视.

在(b)中, 在透视轴上任取两个不同点 V, W. 在二重直线 $p=DV$ 上取一点 Y, 在二重直线 $q=DW$ 上取一点 Z. 确定 Y, Z 的透射对应点 Y', Z', 并验证: $(D, V; Y, Y')=(D, W; Z, Z')$.

对(c)和(d)中的透射, 重复上述内容. 在(d)中, 每一个四点集都是调和集. 这种直射称为调和透射.

16.52 验证习题 16.49(e) 中的直射是平射.

16.53 若

$$S: \rho\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ A=[a_{ij}]\ (i, j=1, 2, 3),\ |A|\neq 0$$

是把 P: (x_1, x_2, x_3) 变为 P': (x_1', x_2', x_3') 的直射.

$$T: \sigma\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix},\ B=[b_{ij}]\ (i, j=1, 2, 3),\ |B|\neq 0$$

是把 P' 变为 P'': (x''_1, x''_2, x''_3) 的直射. 则

$$TS: \tau\begin{bmatrix}x''_1\\x''_2\\x''_3\end{bmatrix}=B\cdot A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ B\cdot A=C$$

是把 P 变为 P'' 的直射. TS 称为结式或 S, T 的乘积. 我们得出: 两个直射的乘积是直射.

(a) 重写开头两个直射, 使得 T 把 Q: (x_1, x_2, x_3) 变为 Q': (x'_1, x'_2, x'_3). S 把 Q' 变为 Q'': (x''_1, x''_2, x''_3), 从而得到:

$$ST: \tau\begin{bmatrix}x''_1\\x''_2\\x''_3\end{bmatrix}=A\cdot B\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

(b) 验证: 当 $P=Q$ 时, 一般地 $P''\neq Q''$.

16.54 考察对射.

(i)
$$\rho\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\1 & -2 & 3\\2 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

(a) 证明: (i) 把直线 S: $5x_1+x_2-7x_3=0$ 上的点 P: $(1, 2, 1)$, Q: $(3, -1, 2)$, R: $(4, 1, 3)$分别变为 S: $(77, -118, -132)$ 上的直线 p: $12x_1+7x_3=0$, q: $10x_1+11x_2-4x_3=0$, r: $22x_1+11x_2+3x_3=0$.

(b) 验证 S 和 s 不是 (i) 中的对应元素.

(c) 验证在诱导变换

(ii)
$$\sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(C^{-1})^T\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$$

中, S 是 s 的对应元素.

(d) 证明: 若把直线 s 上的点变为点 S 上的直线的对射矩阵是 C, 则把 s 变 S 的充要条件是 $(C^{-1})^T=C^{-1}$, 即 C 是对称的.

第十七章 二次曲线

§17.1 基本内容

1. 点素二次曲线

在图 17-1 中，考虑在不同中心 R 和 S 上的直线束：

$$\{Ax\}+\lambda\{Bx\}=0 \qquad (1)$$

和

$$\{Dx\}+\lambda\{Ex\}=0. \qquad (2)$$

由给定的 λ 值在线束 (1) 中确定的直线对应于由同一 λ 值在(2)中确定的直线，这样的对应显然是一一的．而且，因为(1)中任意四条直线的交比等于它们在 (2) 中的对应直线的交比，所以这个对应还是射影的．从(1)和(2)消去 λ，就得到两个直线束的对应直线交点轨迹方程：

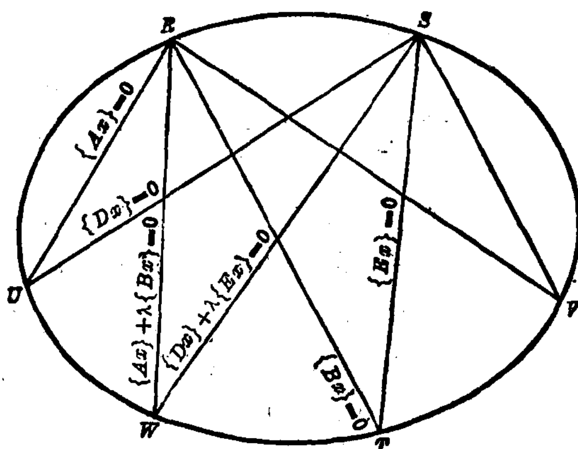


图 17-1

$$\{Ax\}\cdot\{Ex\}-\{Dx\}\cdot\{Bx\}=0. \qquad (3)$$

把 (3) 的左边展开并合并同类项，我们得到：

$$C_{11}x_1^2+C_{22}x_2^2+C_{33}x_3^2+2C_{12}x_1x_2+2C_{31}x_3x_1+2C_{23}x_2x_3=0, \qquad (4)$$

这时 $C_{11}=A_1E_1-D_1B_1$, $C_{12}=\frac{1}{2}(A_1E_2+A_2E_1-D_1B_2-D_2B_1)$，等等．令 $C_{21}=C_{12}$, $C_{13}=C_{31}$, $C_{32}=C_{23}$, (4)可写为：

$$\sum C_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}C_{ij}x_ix_j=0,\ C_{ij}=C_{ji}, \qquad (5)$$

它的矩阵形式是

$$[x_1,\ x_2,\ x_3]\cdot\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0,\ C_{ij}=C_{ji}. \qquad (6)$$

容易证明，轨迹(5)既在 R 上又在 S 上．在习题 17.1 中，我们将证明

定理 17.1 若产生(5)的射影实质上是一个透视时，则(5)的左边是两个线性因子的乘积．

在定理 17.1 的这种情况中，轨迹(5)称为*退化点素二次曲线*；在其它情况，轨迹(5)称为*常态点素二次曲线*．

设 P: (p) 和 Q: (q) 是平面上两个不同点；假如 α 是

$$\sum C_{ij}(p_i+\alpha q_i)(p_j+\alpha q_j)=\sum C_{ij}p_ip_j$$
$$+\alpha(\sum C_{ij}p_iq_j+\sum C_{ij}q_ip_j)+\alpha^2\sum C_{ij}q_iq_j=0 \tag{7}$$

的根，则有 PQ 的点 X：$(p+\alpha q)$ 也在(5)上.

由于

$$\sum C_{ij}p_iq_j=\sum C_{ij}q_ip_j, \tag{8}$$

(7)可化为

$$\sum C_{ij}p_ip_j+2\alpha\sum C_{ij}p_iq_j+\alpha^2\sum C_{ij}q_iq_j=0. \tag{9}$$

现在假设 PQ 包含在(5)中，即(9)对 α 的每一值都成立，则有

$$\sum C_{ij}p_ip_j=\sum C_{ij}p_iq_j=\sum C_{ij}q_ip_j=\sum C_{ij}q_iq_j=0.$$

取点 A: (a)（这里 $a_1=C_{11}p_1+C_{12}p_2+C_{13}p_3=\sum\limits_j C_{1j}p_j$, $a_2=\sum\limits_j C_{2j}p_j$, $a_3=\sum\limits_j C_{3j}p_j$）和 B: (b)（这里 $b_1=\sum\limits_j C_{1j}q_j$, $b_2=\sum\limits_j C_{2j}q_j$, $b_3=\sum\limits_j C_{3j}q_j$）. 因为 $\sum C_{ij}p_ip_j=\sum C_{ij}q_ip_j=0$，所以 A 和 B 都在直线

$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=0 \tag{10_1}$$

上；又因为 $\sum C_{ij}q_ip_j=\sum C_{ij}q_iq_j=0$，所以 A 和 B 都在直线

$$q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3=0 \tag{10_2}$$

上. 但这些直线是不同直线，所以存在 $\beta\neq 0$ 使得

$$\begin{aligned} a_1+\beta b_1&=C_{11}(p_1+\beta q_1)+C_{12}(p_2+\beta q_2)+C_{13}(p_3+\beta q_3)=0,\\ a_2+\beta b_2&=C_{21}(p_1+\beta q_1)+C_{22}(p_2+\beta q_2)+C_{23}(p_3+\beta q_3)=0,\\ a_3+\beta b_3&=C_{31}(p_1+\beta q_1)+C_{32}(p_2+\beta q_2)+C_{33}(p_3+\beta q_3)=0. \end{aligned} \tag{11}$$

从 (11) 我们推得 $[C_{ij}]=0$. 这就证明了

定理 17.2 若轨迹(5)是退化的，则 $[C_{ij}]=0$.

下面回到图 17-1，设 T, U, V, W 是已知二次曲线上的四个定点，R, S 是同一二次曲线上的一个动点的两个位置. 根据定义，RT, RU, RV, RW 和 ST, SU, SV, SW 是射影线束(1)和(2)的四对对应直线. 设 RT 和 ST 是由 $\lambda=\infty$ 确定的，RU 和 SU 是由 $\lambda=0$ 确定的，RV 和 SV 是由 $\lambda=1$ 确定的，那么

$$(RT,\ RU;\ RV,\ RW)=(ST,\ SU;\ SV,\ SW)=(\infty,\ 0;\ 1,\ \lambda)=\lambda,$$

我们有

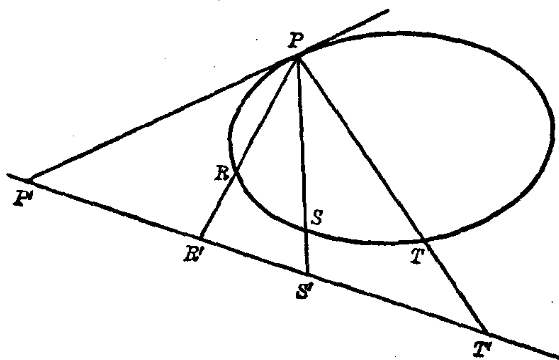


图 17-2

定理 17.3 二次曲线上四个定点与其上一个动点相连所得四条直线的交比是常数.

因此，二次曲线上的点象直线上的点一样，可以由单一的坐标(参数)给出，而且，可以在二次曲线的点与平面上任一直线上的点之间建立一个一一对应(见图 17-2).

2. 点素二次曲线及其切线

考虑点素二次曲线

$$\sum C_{ij}x_ix_j=0,\ C_{ij}=C_{ji},\ |C_{ij}|\neq 0. \tag{12}$$

设 P: (p) 和 Q: (q) 是不同点，P 和 Q 都不在(12)上，X: $(p+\alpha q)$ 是直线 PQ 上的动点，从(9)推出 PQ 或者

(i) 交(12)于两不同点 $(p+\alpha_1 q)$, $(p+\alpha_2 q)$，从而是割线；

(ii) 交(12)于两个重合点，从而是切线；

(iii) 与(12)不相交，从而是非割线.

假设 PQ 是切线，那么(9)是完全平方，我们有：

定理 17.4 连接两个定点 P: (p) 和 Q: (q) 的直线是点素二次曲线(12)的切线的充要条件是

$$(\sum C_{ij}p_ip_j)(\sum C_{ij}q_iq_j)-(\sum C_{ij}p_iq_j)^2=0. \tag{13}$$

再考虑点素二次曲线(12). 设 P: (p) 是一定点而 P 不在 (12) 上，Q: (q) 是平面内的一个动点. 如果 (13) 能够写成两个带有实系数的 q 的线性因子的乘积，这些因子等于零就是在 P 上且与此二次曲线相切的两条直线的方程；如果 (13) 不能这样分解，则过 P 就不能作出此二次曲线的切线. 在第一种情况，我们说 P 在此二次曲线的外部，在第二种情况，我们说 P 在此二次曲线的内部.

最后，假定 P: (p) 是二次曲线(12)上的定点，Q: (q) 是平面内的动点. 那么 (13) 化简为 $(\sum C_{ij}p_iq_j)^2=0$. 用我们更熟悉的 X: (x) 去代替 Q，得到

$$\sum C_{ij}p_ix_j=\sum C_{ij}p_jx_i=0, \tag{14}$$

这就是经过(切点)P 的(12)的切线方程.

设直线 $[X_1,\ X_2,\ X_3]$ 是(12)的切线；切点是 P: (p)，令其等于从 (14) 得到的直线坐标，我们有：

$$\sum_j C_{1j}p_j=X_1,\ \sum_j C_{2j}p_j=X_2,\ \sum_j C_{3j}p_j=X_3,$$

或简写为：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}=C\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}=C^{-1}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

两边取转置(见附录)，就有

$$[p_1,\ p_2,\ p_3]=[X_1,\ X_2,\ X_3]C^{-1}. \tag{16}$$

P 在(12)上的条件是：

$$[p_1,\ p_2,\ p_3]\cdot C\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}=0,$$

把(15)和(16)代入此式得到用直线坐标给出的点素二次曲线方程：

$$[X_1,\ X_2,\ X_3]\cdot C^{-1}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=0. \qquad (17)$$

例 17.1 已知射影直线束

$$x_1-x_2-x_3+\lambda(2x_1+x_2+4x_3)=0$$

和

$$x_1+2x_2-x_3+\lambda(x_1-4x_2+x_3)=0.$$

(a) 求出由它们所产生的轨迹方程.

解: 消去 λ, 我们有

$$(x_1-x_2-x_3)(x_1-4x_2+x_3)-(x_1+2x_2-x_3)(2x_1+x_2+4x_3)=0.$$

轨迹方程是

(i) $$\sum C_{ij}x_ix_j=x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+10x_1x_2+2x_3x_1+4x_2x_3=0,$$

或

(ii) $$[x_1,\ x_2,\ x_3]\cdot\begin{bmatrix}1&5&1\\5&-2&2\\1&2&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0.$$

(b) 证明这轨迹是点素二次曲线.

证明:

$$|C|=\begin{vmatrix}1&5&1\\5&-2&2\\1&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\5&-27&-3\\1&-3&-4\end{vmatrix}\neq 0;$$

所以这轨迹是点素二次曲线.

(c) 求出(i)和连接 P: (2, 0, −1) 及 Q: (0, −4, 1) 的直线的交点(如果存在的话).

解: X: $(2,\ 0,\ -1)+\alpha(0,\ -4,\ 1)=(2,\ -4\alpha,\ -1+\alpha)$ 是 PQ 上任意一点. 如果 X 还在(i)上,则有

$$4-32\alpha^2-3+6\alpha-3\alpha^2-80\alpha-4+4\alpha+16\alpha-16\alpha^2=-51\alpha^2-54\alpha-3=0,$$

$$\alpha=-1,\ -\frac{1}{17}.$$

所以有两个不同的交点:

X_1: (2, 0, −1) − (0, −4, 1) = (2, 4, −2) 或 (1, 2, −1), 和 X_2: $(2,\ 0,\ -1)-\frac{1}{17}(0,\ -4,\ 1)=\left(2,\ \frac{4}{17},\ -\frac{18}{17}\right)$ 或 (17, 2, −9).

(d) 证明 T: (3, 0, −1) 在(i)上并写出过 T 的切线方程.

证明:

$$[3,\ 0,\ -1]\begin{bmatrix}1&5&1\\5&-2&2\\1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}=[3,\ 0,\ -1]\begin{bmatrix}2\\13\\6\end{bmatrix}=0,$$

所以 T 在此二次曲线上. 切线方程是

$$[x_1,\ x_2,\ x_3]\begin{bmatrix}1&5&1\\5&-2&2\\1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}=2x_1+13x_2+6x_3=0.$$

(e) 写出此点素二次曲线在直线坐标系下的方程.

解:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 5 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix},\ C^{-1}=\frac{1}{99}\begin{bmatrix}2 & 17 & 12\\ 17 & -4 & 3\\ 12 & 3 & -27\end{bmatrix}.$$

所求方程是:

$$\text{(iii)}\qquad [X_1,\ X_2,\ X_3]\begin{bmatrix}2 & 17 & 12\\ 17 & -4 & 3\\ 12 & 3 & -27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0.$$

注意: 大多数作者把点方程是(12)的二次曲线的直线方程写作:

$$[X_1,\ X_2,\ X_3]\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0,\ b_{ij}=b_{ji},\ |b_{ij}|\neq 0, \tag{18}$$

这里,b_{ij} 是 C 中 C_{ij} 的余因子 C_{ij}. 这等价于在(17)中用 $\operatorname{adj} C$ 替代 C^{-1}. 这在数值上是普通的变形(见例 17.1(e)).

3. 线素二次曲线

在图 17-3 中,考虑分别在直线 r 和 s 上的点列:

$$\{aX\}+\lambda\{cX\}=0 \tag{1'}$$

和

$$\{dX\}+\lambda\{eX\}=0. \tag{2'}$$

给定的 λ 值在点(1′)中确定的点对应于同一 λ 值在(2′)中确定的点. 这个对应是射影的. 对应点连线的包络方程是

$$\{aX\}\cdot\{eX\}-\{dX\}\cdot\{cX\}=0, \tag{3'}$$

它可以写成

$$\sum b_{ij}X_iX_j=0, \tag{5'}$$

这里, $b_{11}=a_1e_1-d_1c_1,\ b_{12}=b_{21}=\frac{1}{2}(a_1e_2+a_2e_1-d_1c_2-d_2c_1)$, 等等.

(5′)的矩阵形式是

$$[X_1,\ X_2,\ X_3]\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0,\ b_{ij}=b_{ji}. \tag{6'}$$

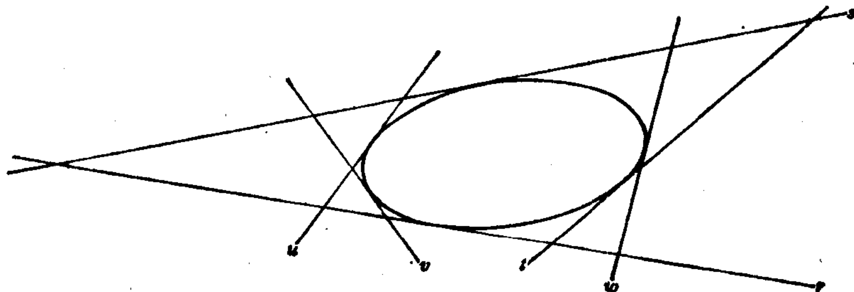


图 17-3

习题 17.1 的对偶说明当上面的射影实质上是透视时，(3′)是两个实因子的乘积，这时轨迹退化为一对不同的点或一对重合点。除了这种情况外，这轨迹称为*线素二次曲线*．我们留给读者完成上面各节的对偶．这样做了以后，我们注意到每一点素二次曲线 (12) 都对应于一线素二次曲线 (18)．对偶地，每一线素二次曲线都对应于一点素二次曲线．换句话说，点素二次曲线 (12) 连同它的切线和对应的线素二次曲线连同它的切点是恒等构图．每一对恒等构图将称为*非奇异二次曲线*或简称*二次曲线*．这样，一条二次曲线就有两种形式的方程：(12)是点坐标形式的，(18)是直线坐标形式的．

4．极线和极点．点素二次曲线

设 $\mathscr{C}$ 是二次曲线，其点坐标形式的方程是 (12)，P：(p) 是平面内任意一点．因为 $\boldsymbol{C}=[C_{ij}]$ 是非奇异的，

$$\boldsymbol{C}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

所以

$$\sum C_{ij}p_ix_j=[x_1,\ x_2,\ x_3]\cdot\boldsymbol{C}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}=0 \tag{19}$$

确定平面内的唯一一条直线 p．这条直线称为点 P 关于 $\mathscr{C}$ 的*极线*．我们现在就要证明这里所定义的极线与第九章中定义的极线是一致的．

首先，注意到(14)和(19)形式相同，因此当 P 在 $\mathscr{C}$ 上时，(19)就是和 $\mathscr{C}$ 相切于 P 点的切线方程．其次，设 Q：(q) 是(19)上任意一点，则

$$\sum C_{ij}p_iq_j=\sum C_{ij}q_ip_j=0. \tag{20}$$

由于 Q 关于 $\mathscr{C}$ 的极线是 $\sum C_{ij}q_ix_j=0$，根据 (20) P 在这条直线上．我们证明了

定理 17.5 若 Q 在 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上，则 P 在 Q 关于 $\mathscr{C}$ 的极线上．

由此推出

定理 17.6 当 Q 遍取 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线 p 上的点时，Q 关于 $\mathscr{C}$ 的极线 q 就遍取在 P 上的直线束中的直线．

如果 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线是 p，我们就称点 P 是直线 p 关于 $\mathscr{C}$ 的*极点*．设 p 是平面内的任意一条直线，从定理 17.6 推出：p 关于 $\mathscr{C}$ 的极点是唯一确定的，它就是 p 上任意两个不同点关于 $\mathscr{C}$ 的极线的交点(如果 p 与 $\mathscr{C}$ 相切于 P，极点在什么地方？)．

我们称定理 17.5 中的点 P 和 Q 关于 $\mathscr{C}$ *互为共轭的*，或关于 $\mathscr{C}$ 构成一对*共轭点*．当 P 在 $\mathscr{C}$ 上时，(19)成为(14)；因此与 P 共轭的所有点 Q 都在与 $\mathscr{C}$ 相切于 P 的切线上．当 P 不在 $\mathscr{C}$ 上时，P 的极线 p 或者是 $\mathscr{C}$ 的割线或者是 $\mathscr{C}$ 的非割线．假定 p 是割线，与 $\mathscr{C}$ 相交于点 R 和 S．$R(S)$ 关于 $\mathscr{C}$ 的极线就是与 $\mathscr{C}$ 相切于 $R(S)$ 的切线，根据定理 17.5，这极线在 P 上．因此，如果 P 在 $\mathscr{C}$ 的外部，从 P 所引 $\mathscr{C}$ 的两条切线的切点位于 P 的极线上．最后，如果 P 在 $\mathscr{C}$ 的内部，P 的极线(即与 P 共轭的点的轨迹)就是非割线．

设 P：(p) 是不在 $\mathscr{C}$ 上的一点，p 是 P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线．如果 P 在 $\mathscr{C}$ 的外部，在 p 上取点 Q：(q) 使得 PQ 交 $\mathscr{C}$ 于不同点 R 和 S；如果 P 在 $\mathscr{C}$ 的内部，在 p 上取 Q：(q)，仍然

把 PQ 与 $\mathscr{C}$ 的交点记为 R 和 S. 在这两种情况中, R: $(p+\lambda q)$ 和 S: $(p+\mu q)$ 中的 λ, μ 都是(9)的根. 因为 P 和 Q 是共轭点, $\sum C_{ij}p_iq_j=0$, 所以 $\lambda+\mu=0$. 于是证明了

定理 17.7 设 P, Q 是关于 $\mathscr{C}$ 的一对共轭点. 如果 P, Q 中有一点在 $\mathscr{C}$ 上, 则另一点在与 $\mathscr{C}$ 相切于这点的切线上. 如果 P, Q 都不在 $\mathscr{C}$ 上, 但直线 PQ 是与 $\mathscr{C}$ 相交于 R 和 S 的割线, 则 $H(P, Q; R, S)$. 由此推出:

定理 17.8 在 $\mathscr{C}$ 的割线 p 上的共轭点对形成一对合, 这对合的二重点就是 p 和 $\mathscr{C}$ 的交点.

如果三角形的每一顶点和对边关于 $\mathscr{C}$ 互为极点和极线, 则说这三角形关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 是*自配极的*. 这样, 每一顶点都与其它两顶点共轭, 对偶地, 每一边都与其它两边共轭, 我们有:

定理 17.9 如果一个三角形的每两个顶点都是关于某条二次曲线的共轭点, 每两边都是关于这二次曲线的共轭直线, 则这个三角形关于该二次曲线是自配极的.

5. 极点和极线. 线素二次曲线

直线坐标的方程是(18)的二次曲线记为 $\mathscr{C}$, 设 p: (P) 是平面上的任意一条直线. 因为 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是非奇异的,

$$\boldsymbol{B}\cdot\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

所以

$$\sum b_{ij}P_iX_j=[X_1,\ X_2,\ X_3]\cdot\boldsymbol{B}\cdot\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}=0 \tag{19'}$$

确定这平面的唯一一点 P. 这点称为 p 关于 $\mathscr{C}$ 的*极点*. 同样定义: 在点 P 上的任意两条不同直线关于 $\mathscr{C}$ 的极点确定一直线 p, p 称为 P 关于 $\mathscr{C}$ 的*极线*.

如果两条直线 p, q 中的一条在另一条的极点上, 则说直线 p 和 q 是关于 $\mathscr{C}$ *共轭的*.

我们留给读者证明定理 17.5~17.9 的对偶, 定理 17.7 的对偶是:

定理 17.7′ 设 p, q 是关于 $\mathscr{C}$ 的一对共轭直线. 如果其中一条直线在 $\mathscr{C}$ 上, 则另一条在前一直线的切点上. 如果两条直线都不在 $\mathscr{C}$ 上, 而 $\mathscr{C}$ 的两条直线 r, s 在 $p\cdot q$ 上, 则 $H(p, q; r, s)$.

从这一节和前几节推出, 一条固定的二次曲线 $\mathscr{C}$: $\sum C_{ij}x_ix_j=0$ 或 $\sum b_{ij}X_iX_j=0$ 在平面的点 (x_1, x_2, x_3) 和直线 $[X_1, X_2, X_3]$ 之间建立了一个一一对应.

$$\rho\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\quad 和\quad \sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}.$$

这个对应保持交比不变(证明这点), 因此是配极对射(见第十六章).

6. 二次曲线的方程

到现在为止, 我们都假定所考虑的二次曲线

$$\mathscr{C}: \sum C_{ij}x_ix_j=0 \tag{12}$$

在平面中关于坐标系处在一般位置. 现在，我们来求当坐标三角形的顶点和边与二次曲线紧密相连时这条二次曲线的方程.

假定我们在 $\mathscr{C}$ 上取 A_1: (a), A_2: (b), A_3: (c)为新坐标三角形的顶点,并且假定此二次曲线关于新三角形的方程是

(i) $$\sum C'_{ij}x'_ix'_j=0.$$

因为 A_1: $(1, 0, 0)$, A_2: $(0, 1, 0)$, A_3: $(0, 0, 1)$ 在 (i) 上，所以 $C'_{11}=C'_{22}=C'_{33}=0$, 且方程(i)具有形式:

$$C'_{12}x'_1x'_2+C'_{31}x'_3x'_1+C'_{23}x'_2x'_3=0 \tag{21}$$

或 $$[x'_1,\ x'_2,\ x'_3]\cdot\begin{bmatrix}0 & C'_{12} & C'_{13}\\ C'_{21} & 0 & C'_{23}\\ C'_{31} & C'_{32} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{bmatrix}=0,\ C'_{12}\cdot C'_{31}\cdot C'_{23}\neq 0.$$

如果单位点 A_4: $(1, 1, 1)$ 也取在 (21) 上,关于系数,我们进一步有条件 $C'_{12}+C'_{31}+C'_{23}=0$.

其次,设 A_1: (a), A_2: (b), A_3: (c) 是关于(12)的自配极三角形的顶点. 以这个三角形为坐标三角形,设此二次曲线关于这个坐标三角形的方程是

(ii) $$\sum C'_{ij}x'_ix'_j=0.$$

由于 A_1: $(1, 0, 0)$ 关于(ii)的极线 $C'_{11}x'_1+C'_{21}x'_2+C'_{31}x'_3=0$ 是 $x'_1=0$,所以,$C'_{21}=C'_{31}=0$. 类似地,由于 A_2: $(0, 1, 0)$ 的极线是 $x'_2=0$,有 $C'_{23}=0$,还有 A_3: $(0, 0, 1)$ 的极线是 $x'_3=0$. 因此这条二次曲线的方程具有形式

$$C'_{11}x'^2_1+C'_{22}x'^2_2+C'_{33}x'^2_3=0 \tag{22}$$

或 $$[x'_1,\ x'_2,\ x'_3]\cdot\begin{bmatrix}C'_{11} & 0 & 0\\ 0 & C'_{22} & 0\\ 0 & 0 & C'_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{bmatrix}=0,$$

这里系数 C'_{11}, C'_{22}, C'_{33} 都不为零. 而且由于此二次曲线是实的，所以 C'_{11}, C'_{22}, C'_{33} 的符号不会相同.

通过重新命名上面的自配极三角形的顶点(如果必要的话)，我们总能使得 $C'_{11}>0$, $C'_{22}>0$, $C'_{33}<0$. 因而变换

(iii) $$\rho X''=\begin{bmatrix}\sqrt{C'_{11}} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{C'_{22}} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{-C'_{33}}\end{bmatrix}X$$

把(22)化简为

$$x''^2_{11}+x''^2_{22}-x''^2_{33}=0. \tag{23}$$

因此,所有的(实,常态)二次曲线都射影等价.

把(22)直接变到(23)的变换 $\rho X''=BX$ 保持坐标三角形不变,但一般说来，单位点会变(见第十六章).

7. 退化的二次曲线

具有方程

$$\sum C_{ij}x_ix_j=0,\ C_{ij}=C_{ji},\ |C_{ij}|=0 \tag{24}$$

的退化点素二次曲线 $\mathscr{C}$ 或者由两条不同直线所组成，或者由一条计算两次的直线所组成（见图 17-4）．如果由点 S: (s) 和 $\mathscr{C}$ 上任一其它点 Y: (y) 所确定的每一直线都包含在 $\mathscr{C}$ 中，则 S 称为 $\mathscr{C}$ 的奇点．因此，当 $\mathscr{C}$ 由一对不同直线 a, b 组成时，它只有一个奇点 $S=a\cdot b$; 当 $\mathscr{C}$ 由一条计算两次的直线 a 组成时，a 的每一点都是奇点．当 S 是奇点，Y 是这个平面内的任一其它点，如果 λ 是

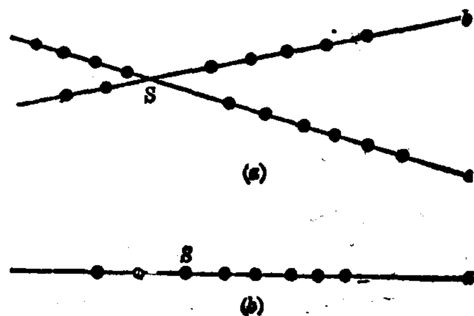


图 17-4

$$\sum c_{ij}(s_i+\lambda y_i)(s_j+\lambda y_j)=\sum C_{ij}s_is_j+2\lambda\sum C_{ij}s_iy_j+\lambda^2\sum C_{ij}y_iy_j=0 \tag{25}$$

的根（见(9)式），那么 SY 上的点 $(S)+\lambda(y)$ 也在 $\mathscr{C}$ 上．当 Y 在 $\mathscr{C}$ 上时，直线 SY 包含在 $\mathscr{C}$ 中，这时(25)中所有的系数都为零；当 Y 不在 $\mathscr{C}$ 上时，直线 SY 与 $\mathscr{C}$ 只相交于 S．这时，在(25)中 $\sum C_{ij}s_is_j=\sum C_{ij}s_iy_j=0$．因此，当 Y 是平面内的任一点时，$\sum C_{ij}s_iy_j=0$，从而有

$$\sum_i C_{i1}s_i=0,\ \sum_i C_{i2}s_i=0,\ \sum_i C_{i3}s_i=0. \tag{26}$$

反之，如果 S: (s) 是 $\mathscr{C}$ 上一点使得(26)式成立，那么，对于每一个 λ 的值，点 $(s)+\lambda(y)$ 在 $\mathscr{C}$ 上．我们证明了

定理 17.10 点 S: (s) 是退化二次曲线 $\mathscr{C}$: $\sum C_{ij}x_ix_j=0$ 的奇点的充要条件是 (26) 成立．

假定(24)由点 S: (s) 上的一对不同直线

$$a:\ a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=0$$

和

$$b:\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=0$$

所组成，设 P: (p) 是平面内不同于 S 的任一点，则

$$\begin{aligned}&(a_1p_1+b_1p_2+c_1p_3)(a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3)\\&\quad+(a_2p_1+b_2p_2+c_2p_3)(a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3)\\&=2\sum C_{ij}p_ix_j=0,\end{aligned} \tag{27}$$

P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线在 S 上．如果 P 在 $\mathscr{C}$ 上，即如果 P 在直线 a 或直线 b 上，则 P 的极线就是那条直线．为了与非退化二次曲线的情况保持一致，我们称(27)为 $\mathscr{C}$ 在 P 点的切线．如果 P 不在 $\mathscr{C}$ 上，则(27)和直线 PS:

$$\begin{aligned}&(a_1p_1+b_1p_2+c_1p_3)(a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3)\\&\quad-(a_2p_1+b_2p_2+c_2p_3)(a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3)=0\end{aligned} \tag{28}$$

调和分隔直线 a 和 b．

如果 P, Q 是不在 $\mathscr{C}=a$, b 上的两点且 $H(a,\ b;\ PS,\ QS)$，其中 $S=a\cdot b$．那么 P, Q 关于 $\mathscr{C}$ 共轭．然而，如果 $P\neq S$ 在 $\mathscr{C}$ 上，那么 Q 和 P 共轭的充要条件是 Q 也在 a 或 b 上．

当 $\mathscr{C}=a$, b 时，$S=a\cdot b$ 的极线没有定义．这时，我们可以定义直线 a, b 为 $\mathscr{C}$ 在S点的

由(26)可知 $\sum C_{ij}s_ix_j$ 对于任一三元数组 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 都恒等于零，所以平面上

为共轭点．

如果它的每两个顶点都是一对关于 $\mathscr{C}$ 的共轭点，那么这个三角形是 $\mathscr{C}$ 的

自配极三角形. $\mathscr{C}$ 的每一个自配极三角形必须以 S 为它的一个顶点，同时连接 S 和其它两顶点的两边必须调和分隔组成 $\mathscr{C}$ 的两条直线.

对偶地，具有方程

$$\sum b_{ij}X_iX_j=0,\ b_{ij}=b_{ji},\ |b_{ij}|=0 \tag{29}$$

的退化线素二次曲线 $\mathscr{C}$ 或者由两个不同点所组成，或者由一个看作两次的点所组成（参看图 17-5）. 如果由直线 s: $[S]$ 和线素二次曲线 $\mathscr{C}$ 上的任一其它直线的交点都属于 $\mathscr{C}$，则 s 是 $\mathscr{C}$ 的**奇异直线**. 我们留给读者完成退化线素二次曲线的研究.

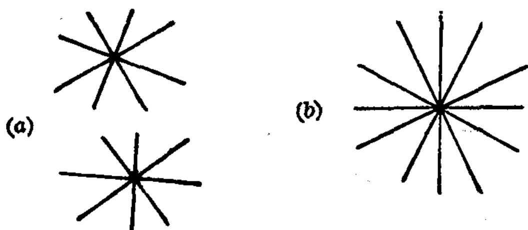


图 17-5

前面，我们发现非退化二次曲线有两个方程，一个是点坐标形式的，另一个是直线坐标形式的. 而退化点素（线素）二次曲线没有直线（点）坐标形式的方程.

8. 二次曲线对

从我们在度量平面内的经验可以得出结论：两条不同的二次曲线交于四点，这些点并不一定都是实的. 为了在射影平面内解决这个问题，设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 是这平面内的两条不同的点素二次曲线，并且假设坐标三角形和单位点的选择使得（见习题 17.24）：

$$\mathscr{C}:\ x_1^2-x_2x_3=0, \tag{30}$$

同时

$$\mathscr{C}':\ \sum C'_{ij}x_ix_j=0,\ C'_{22}\neq 0. \tag{31}$$

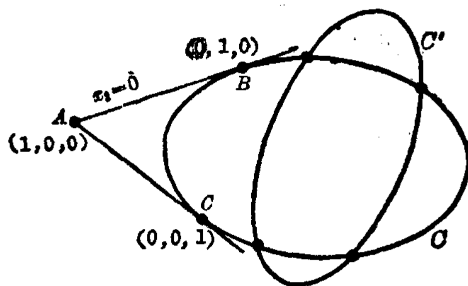


图 17-6

(31) 中的限制仅要求坐标三角形的顶点 B: $(0,1,0)$ 不是 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的交点. 因为坐标三角形的边 $x_3=0$ 是 $\mathscr{C}$ 的切线，所以它不能在这两条二次曲线的任何一个交点上. 因此，如果我们在 (30) 中取 $x_3\neq 0$，将不会失去交点，且解得 $x_2=\frac{x_1^2}{x_3}$. 把 x_2 的这个值代入(31)，得到：

$$C'_{22}r^4+2C'_{12}r^3+(C'_{11}+2C'_{23})r^2+2C'_{13}r+C'_{33}=0, \tag{32}$$

这里为了方便起见，令 $\frac{x_1}{x_3}=r$. 由于(32)有四个根 r_1, r_2, r_3, r_4；所以 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 有四个交点：$(r_1, r_1^2, 1)$, $(r_2, r_2^2, 1)$, $(r_3, r_3^2, 1)$, $(r_4, r_4^2, 1)$.

现在，我们仅考虑四个根互不相同的情况. 这时，$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 相交于不同点 P, Q, R, S（见图 17-7(a)），用 p 和 p' 分别表示 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 在交点 P 处的切线，因为在四个一般点上且在其中一点处切于一已知直线的二次曲线只有一条，所以 p 和 p' 是不同直线. 如果两条不同的二次曲线在一交点处的切线不同，则称此交点为**简单点**. 因此，如果两条二次曲线有四个不同的交点，那么每一个交点都是简单点.

其次，设(32)的根是 r_1, r_1, r_2, r_3；从而这两条二次曲线交于三个不同点，其中一个点算了两次. 设想图 17-7(a) 中的二次曲线 $\mathscr{C}$ 固定不变，同时 $\mathscr{C}'$ 变化. 在变化中，$\mathscr{C}'$ 与 $\mathscr{C}$

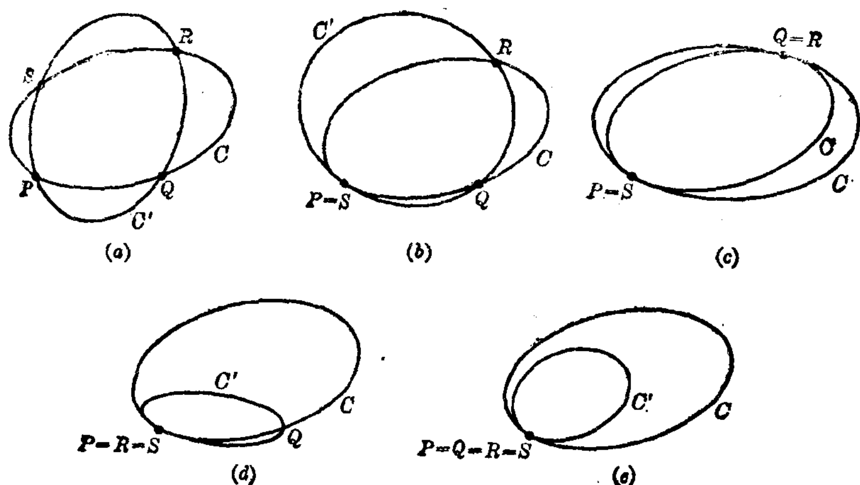


图 17-7

的三个交点 P, Q, R 保持不变而第四个交点 S 无限地趋近于 P, 因为 S 沿着两条二次曲线趋近于 P, 所以 PS 的极限就是这两条曲线在p点的切线(见图 17-7(b)). 这时P 是二次曲线的二重切点,而交点 Q 和 R 是简单点.

当(32)的根是 r_1, r_1, r_2, r_2 时,如图 17-7(c) 所示, $P=S$ 和 $Q=R$ 都是这些二次曲线的二重切点.

再次, 设(32)的根是 r_1, r_1, r_1, r_2. 在图 17-7(d) 中保持 $\mathscr{C}$ 不变, 而让 $\mathscr{C}'$ 变化但仍在 Q 上,在变化中二重切点 P 不变而让交点 R 无限地趋近于 P. 这样, Q 仍然是简单切点而 P 为它们的三重切点(见图 17-7(d)).

最后,当(32)的根是 r_1, r_1, r_1, r_1 时, $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的四个交点重合(见图 17-7(e)), 这些二次曲线以 P 为四重切点。

我们把前面几段的对偶大部分仍然留给读者完成. 在 $\mathscr{C}$ 的直线中选择坐标三角形的

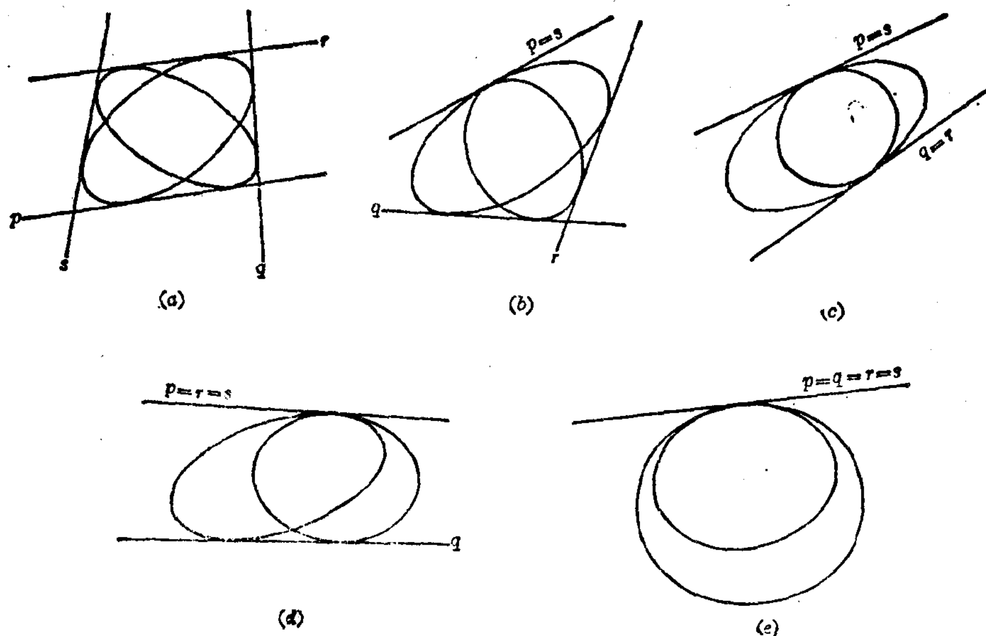


图 17-8

两边 b, c(b 不是 $\mathscr{C}'$ 中的直线)和单位直线，而取 b 和 c 的切点连线为坐标三角形剩下的一边。仅考虑使得(32′)只有实根的二次曲线对，我们就得到图 17-8(a)，(b)，(c)，(d)，(e) 所示五种情况。在图 17-8(a) 中，这两条二次曲线以 p, q, r, s 为简单公切线；在图 17-8(b) 中，这两条二次曲线以 p 为二重公切线而以 q 和 r 为简单公切线，等等。

9．四点形上的二次曲线束

在第十一章中，四点形上的点素二次曲线束定义为在四个不同点(其中没有三点共线)上的所有二次曲线(常态的或退化的)的集合，记这四点为 P, Q, R, S，令

$$\mathscr{C}: \sum C_{ij}x_ix_j=0,\quad |C_{ij}|\neq 0$$

和

$$\mathscr{C}': \sum C'_{ij}x_ix_j=0,\quad |C'_{ij}|\neq 0$$

是这四点上的两条不同二次曲线．我们证明当 λ 在扩大了的实数系中变化时，由

$$\sum C_{ij}x_ix_j+\lambda\sum C'_{ij}x_ix_j=\left(\sum C_{ij}+\lambda\sum C'_{ij}\right)x_ix_j=0 \tag{33}$$

表示的二次曲线(包括退化二次曲线)的全体是一个四点形上的二次曲线束．首先注意由(33) 给出的每一轨迹都在这四点上．反过来，设 $\mathscr{C}''$ 是在基本点 P, Q, R, S 上的二次曲线(常态的或退化的)，T: (t) 是 $\mathscr{C}''$ 上任意的第五点，则

$$\sum C'_{ij}t_it_j\cdot\sum C_{ij}x_ix_j-\sum C_{ij}t_it_j\cdot\sum C'_{ij}x_ix_j=0 \tag{34}$$

是在这五点上的二次曲线，而由这五点所确定的二次曲线又是唯一的，所以 (34) 一定是 $\mathscr{C}''$．最后，令

$$\lambda=-\sum C_{ij}t_it_j/\sum C'_{ij}t_it_j$$

我们就得知 $\mathscr{C}''$ 是曲线束(33)的成员．

显然，直线对 PQ, RS; PR, QS; PS, QR 是这个束中的三条退化二次曲线．这个束中的退化二次曲线由且仅由满足

$$|C+\lambda C'|=|[C_{ij}]+\lambda[C'_{ij}]|=0$$

的那些 λ 值给出．因此，不可能有超过三条的退化二次曲线．存在三条不同的退化二次曲线说明 $|C+\lambda C'|=0$ 的根是实数且互不相同．用 $|C+\lambda C'|$ 去代替 $|A-\lambda I|$，我们就能解析地证明这些根总是实数(参看附录)．

在 (33) 中假定了 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 是在这四点上的常态二次曲线，在习题 17.10 中，我们将要证明任意两条不同的二次曲线(常态的或退化的)都可用来定义这个曲线束．应用退化二次曲线就给出了得到在五个一般点上的二次曲线方程的简单步骤．

例 17.2 求出在 P: (1, 0, −1), Q: (1, 0, 1), R: (1, 2, 1), S: (1, 2, −1), T: (1, 3, 0) 上的二次曲线方程．

解：首先，我们写出在 P, Q, R, S 上的曲线束方程，其中两条退化二次曲线是 $\mathscr{C}'=PQ$, RS 和 $\mathscr{C}''=PR$, QS．因此，

$$\mathscr{C}': x_2(2x_1-x_2)=0,$$

$$\mathscr{C}'': (x_1-x_2+x_3)(x_1-x_2-x_3)=0,$$

从而

(i) $$\mathscr{C}'+\lambda\mathscr{C}'': 2x_1x_2-x_2^2+\lambda(x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_1x_2)=0$$

是这个曲线束的方程，

把 T 的坐标代入(i)，求出 $\lambda=\frac{3}{4}$，因此所求二次曲线的方程是 $3x_1^2-x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2=0$（比较习题 17.14）.

对偶地，设 $\mathscr{C}$: $\sum b_{ij}X_iX_j=0$ 和 $\mathscr{C}'$: $\sum b'_{ij}X_iX_j=0$ 是两条线素二次曲线（见图 17-8 (a)），它们有四条不同的公切线 p: $[P]$, q: $[Q]$, r: $[R]$, s: $[S]$，考虑曲线束

$$\sum b_{ij}X_iX_j+\lambda\sum b'_{ij}X_iX_j=0. \tag{35}$$

这个束中的退化二次曲线由完全四线形 $pqrs$ 的对顶点对所组成. 容易证明，束(35)的方程可以用

$$\sum b''_{ij}X_iX_j+\lambda\sum b'''_{ij}X_iX_j=0$$

替代. 这里，$\sum b''_{ij}X_iX_j=0$ 和 $\sum b'''_{ij}X_iX_j=0$ 是任意两条退化二次曲线.

10. 二次曲线束

设 $\mathscr{C}$: $\sum C_{ij}x_ix_j=0$ 和 $\mathscr{C}'$: $\sum C'_{ij}x_ix_j=0$ 是两条不同的(常态)二次曲线，它们的交点都是实的. 考虑曲线束

$$\sum C_{ij}x_ix_j+\lambda\sum C'_{ij}x_ix_j=0. \tag{36}$$

我们这里关心的是 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的交点相同时所出现的情况.

首先，假定 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 以 P 为二重切点，以不同点 Q 和 R 为简单交点. 记 $\mathscr{C}$ 在 P 点的切线为 p，那么，p 既是 $\mathscr{C}$ 的切线又是 $\mathscr{C}'$ 的切线，从而 p 是这束中每一条二次曲线在 P 点的切线. 这个束中的退化二次曲线是 $\mathscr{C}''=p$, QR: $\sum C''_{ij}x_ix_j=0$ 和 $\mathscr{C}'''=PQ$, QR: $\sum C'''_{ij}x_ix_j=0$，后者应该计算两次. 因此，这个束可以由

$$\sum C''_{ij}x_ix_j+\lambda\sum C'''_{ij}x_ix_j=0$$

来确定. 我们有：

定理 17.11 存在唯一一条二次曲线，它和已知的二次曲线 $\mathscr{C}$ 以已知点 P 为二重切点，以其它两点为简单交点，并且在任一给定点 T 上(T 既不在 $\mathscr{C}$ 上，也不在 $\mathscr{C}$ 在 P 点处的切线上). (见习题 17.12.)

其次，假定 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 以 P 和 $Q\neq P$ 为二重切点，公切线分别是 p 和 q. 由于 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 确定的二次曲线束包含两条不同的退化二次曲线 $\mathscr{C}''=p$, q 和 $\mathscr{C}'''=PQ$, PQ，后者应计算两次. 因此有

定理 17.12 存在唯一一条二次曲线，它和已知的二次曲线 $\mathscr{C}$ 以不同点 P 和 Q 为二重切点并且在任一其它点 T 上(T 既不在 $\mathscr{C}$ 上也不在 $\mathscr{C}$ 在 P 点或 Q 点处的切线上).

当 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 以 P 为三重切点，以 Q 为简单交点时，由这两条二次曲线所确定的二次曲线束只有一条计算三次的退化二次曲线

$$\mathscr{C}''=p,\ PQ:\ \sum C''_{ij}x_ix_j=0.$$

假定

$$\sum C'_{ij}x_ix_j+\alpha\sum C_{ij}x_ix_j=\sum C''_{ij}x_ix_j;$$

那么

$$\sum C'_{ij}x_ix_j=\sum C''_{ij}x_ix_j-\alpha\sum C_{ij}x_ix_j.$$

于是有

定理 17.13 存在唯一一条二次曲线 $\mathscr{C}'$，它和已知的二次曲线 $\mathscr{C}$ 以 P 为三重切点，以 $Q\neq P$ 为简单交点，并且在另一点 T 上(T 既不在 $\mathscr{C}$ 上也不在 $\mathscr{C}$ 在 P 点处的切线 p 上)，这条二次曲线属于由 $\mathscr{C}$ 和退化二次曲线 $\mathscr{C}''=p$, PQ 确定的曲线束.

我们留给读者证明

定理 17.14　存在唯一一条二次曲线 $\mathscr{C}'$，它与已知的二次曲线 $\mathscr{C}$ 以 P 为四重切点并且在任一其它点上(这点既不在 $\mathscr{C}$ 上也不在 $\mathscr{C}$ 在 P 点处的切线 p 上)．这条二次曲线属于由 $\mathscr{C}$ 和退化二次曲线 $\mathscr{C}''=p, p$ 所确定的曲线束(见习题 17.13)．

§ 17.2　问题及其解

17.1　求由 1. 中透视直线束(1)和(2)产生的轨迹．

解：因为这两个束是透视的，所以中心连线 RS 是自对应的．假定这条直线由 $\lambda=0$ 给出，则 $\{Ax\}=\{Dx\}$，方程(3)化为

$$\{Ax\}\cdot[\{Ex\}-\{Bx\}]=0.$$

轨迹由中心直线 $\{Ax\}=0$ 和透视轴 $\{Ex\}-\{Bx\}=0$ 组成．

17.2　对于 1. 中的(非透视)射影直线束(1)和(2)，证明：束(1)中的直线 RS 在束(2)中的对应线与二次曲线(3)切于 S．

证明：一般来说，无论哪个束中的直线都和二次曲线(3)交于两点——束的中心 R 或 S 和此直线在另一束中的对应直线的交点 T．考察直线 $p_1=RS$：$\{Ax\}+\lambda_1\{Bx\}=0$ 和它在束(2)中的对应直线 q_1：$\{Dx\}+\lambda_1\{Ex\}=0$，由于 $T=p_1\cdot q_1=S$，所以 q_1 与(3)切于 S．

同理，若把 RS 看作束(2)中的直线，则它的对应直线与(3)切于 R．

17.3　求例 17.1 中的二次曲线过点 P：$(-29, 1, 24)$ 的切线方程(如果有的话)．

解：P 的极线 p 是

$$[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 5 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-29\\ 1\\ 24\end{bmatrix}=-99x_2-99x_3=0$$

或

$$x_2+x_3=0.$$

我们采用下列两个步骤之一：(i) 在 p 上选取两点 $(0, 1, -1)$，$(1, 1, -1)$，其余步骤与例 17.1(c) 相同．(ii) 从二次曲线和 p 的方程中消去 x_3．由(ii)可得

$$x_1^2-2x_2^2-3x_2^2+10x_1x_2-2x_1x_2-4x_2^2=x_1^2+8x_1x_2-9x_2^2$$
$$=(x_1+9x_2)(x_1-x_2)=0.$$

因此，p 和二次曲线的交点是$(9, -1, 1)$，$(1, 1, -1)$．在$(9, -1, 1)$上的切线方程为

$$[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 5 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=0$$

或

$$5x_1+49x_2+4x_3=0.$$

在$(1, 1, -1)$上的切线方程为

$$5x_1+x_2+6x_3=0.$$

17.4　证明：若从点 P：(p) 和 Q：(q) 画出的 $\mathscr{C}$ 的四条切线是不同的，则 P，Q 和这四条切线的切点在一条二次曲线 $\mathscr{C}'$ 上．

证明：设 $\mathscr{C}$：$\sum C_{ij}x_ix_j=0$；则有两个切点在 $\sum C_{ij}p_ix_j=0$ 上，另两个切点在 $\sum C_{ij}q_ix_j=0$ 上．于是

$$\mathscr{C}': \sum C_{ij}x_ix_j \cdot \sum C_{ij}p_iq_j - \sum C_{ij}p_ix_j \cdot \sum C_{ij}q_ix_j = 0$$

在这六点上.

17.5 证明:若一个三角形内接于二次曲线 $\mathscr{C}$, 则它的任一边的共轭线交其余两边于一对共轭点(见习题 9.6).

证明: 把内接三角形取作坐标三角形 ABC, 其坐标为 A: (1, 0, 0), B: (0, 1, 0), C: (0, 0, 1); 则 $\mathscr{C}$ 的方程为(21)式. 考察边 $C=AB$: $x_3=0$, A 的极线方程为 $C_{21}x_2+C_{31}x_3=0$, B 的极线方程为 $C_{12}x_1+C_{32}x_3=0$; 所以 C 的极点是 C': $(C_{23}, C_{13}, -C_{12})$. 在 C 上取 P: $(1, p, 0)$, 则

$$C'P: pC_{12}x_1 - C_{12}x_2 + (pC_{23} - C_{13})x_3 = 0$$

与 C 共轭. $C'P$ 和 a: $x_1=0$, b: $x_2=0$ 的交点分别是 Q: $(0, pC_{23}-C_{13}, C_{12})$ 和 R: $(pC_{23}-C_{13}, 0, -pC_{12})$. Q 关于 $\mathscr{C}$ 的极线方程是

$$[x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ pC_{23} - C_{13} \\ C_{12} \end{bmatrix} = 0$$

或
$$pC_{12}x_1 + C_{12}x_2 + (pC_{23} - C_{13})x_3 = 0,$$

这条极线显然在 R 上. 于是 Q 和 R 关于 $\mathscr{C}$ 共轭.

17.6 证明: 关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的两个自配极三角形的六个顶点在另一条二次曲线 $\mathscr{C}'$ 上.

证明: 取坐标三角形 ABC 作为两个三角形之一, 则

$$\mathscr{C}: C_{11}x_1^2 + C_{22}x_2^2 + C_{33}x_3^2 = 0.$$

设 P: (p), Q: (q), R: (r) 是第二个三角形的顶点(读者可证明: 若 P, Q, R 的任一坐标为 0, 则这个定理不成立).

P 的极线方程为

$$C_{11}p_1x_1 + C_{22}p_2x_2 + C_{33}p_3x_3 = 0,$$

若 (i)
$$C_{11}p_1q_1 + C_{22}p_2q_2 + C_{33}p_3q_3 = 0,$$

(ii)
$$C_{11}p_1r_1 + C_{22}p_2r_2 + C_{33}p_3r_3 = 0,$$

则这条直线在 Q 和 R 上, 因此, 只要 (i), (ii) 和

(iii)
$$C_{11}q_1r_1 + C_{22}q_2r_2 + C_{33}q_3r_3 = 0$$

成立, 则 PQR 是关于 $\mathscr{C}$ 的自配极三角形.

由这些方程可得

$$\begin{vmatrix} q_1r_1 & q_2r_2 & q_3r_3 \\ p_1r_1 & p_2r_2 & p_3r_3 \\ p_1q_1 & p_2q_2 & p_3q_3 \end{vmatrix} = 0,$$

上式各列分别除以 $p_1q_1r_1$, $p_2q_2r_2$, $p_3q_3r_3$, 得

(iv)
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p_1} & \frac{1}{p_2} & \frac{1}{p_3} \\ \frac{1}{q_1} & \frac{1}{q_2} & \frac{1}{q_3} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} \end{vmatrix} = 0.$$

(iv)式保证了存在不全为 0 的常数 a, b, c, 使得

$$(\text{v})\qquad \begin{bmatrix} \dfrac{1}{p_1} & \dfrac{1}{p_2} & \dfrac{1}{p_3} \\ \dfrac{1}{q_1} & \dfrac{1}{q_2} & \dfrac{1}{q_3} \\ \dfrac{1}{r_1} & \dfrac{1}{r_2} & \dfrac{1}{r_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

显然, $\mathscr{C}'$: $ax_2x_3+bx_3x_1+cx_1x_2=0$ 是所求的二次曲线. 因为, 由(v)它在 P, Q, R 上, 由(21)式它在 A, B, C 上.

17.7 证明: 若一个完全四边形的两对对顶点是关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的共轭点, 则第三对也是共轭点.

证明: 设四边形的边是: a: [1, 0, 0], b: [0, 1, 0], c: [0, 0, 1], e: [1, 1, 1], $\mathscr{C}$ 的方程是 $\sum C_{ij}x_ix_j=0$. 假定 $C=a\cdot b$: (0, 0, 1), $F=c\cdot e$: (1, −1, 0) 是一对关于 $\mathscr{C}$ 的共轭点, 则 F 在 C 的极线上, 因而 $C_{13}=C_{23}$. 同理, 若 $B=c\cdot a$: (0, 1, 0) 和 $E=b\cdot e$: (1, 0, −1) 是一对共轭点, 则 $C_{12}=C_{32}$. 现在, $A=b\cdot c$: (1, 0, 0)的极线是 $C_{11}x_1+C_{21}(x_2+x_3)=0$, 且此极线在 $D=a\cdot e$: (0, 1, −1) 上, 所以 A 和 D 共轭.

17.8 证明: 若 Q, S 是二次曲线 $\mathscr{C}$ 上两点, A, C 是关于 $\mathscr{C}$ 与 QS 共轭的任一直线上的一对共轭点, 则 $AQ\cdot CS$ 和 $AS\cdot CQ$ 在 $\mathscr{C}$ 上(见习题 9.26 和 17.24).

证明: 取 C: $x_1^2=x_2x_3$ 和 $\mathscr{C}$ 上的点 Q: (0, 1, 0), S: (0, 0, 1), E: (1, 1, 1) 以及 QS 的极点 R: (1, 0, 0). R 上的直线 r: $x_2-ax_3=0$ 与 QS 共轭. 在 r 上取 C: (b, a, 1), 它的极线 $2b_1x-x_2-ax_3=0$ 交 r 于 A: (a, ab, b). 于是, AQ: $bx_1-ax_3=0$ 和 CS: $ax_1-bx_2=0$ 交于 U: (ab, a^2, b^2), AS: $bx_1-x_2=0$ 和 CQ: $x_1-bx_3=0$ 交于 V: (b, b^2, 1). 显然 U, V 在 $\mathscr{C}$ 上.

17.9 证明: 若一个点在一条已知直线上移动, 则它关于两条已知二次曲线的极线的交点在第三条二次曲线上.

证明: 设已知直线由 P: (p), Q: (q) 两点确定, 已知的二次曲线为 $\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 和 $\sum b_{ij}x_ix_j=0$. 点 ($p+\lambda q$) 关于已知二次曲线的极线分别为 $\sum a_{ij}p_ix_j+\lambda\sum a_{ij}q_ix_j=0$ 和 $\sum b_{ij}p_ix_j+\lambda\sum b_{ij}q_ix_j=0$, 消去 λ, 得

$$\sum a_{ij}p_ix_j\cdot\sum b_{ij}q_ix_j-\sum a_{ij}q_ix_j\cdot\sum b_{ij}p_ix_j=0,$$

这就是第三条二次曲线的方程.

17.10 证明: 四点形上的二次曲线束(33)可由

$$\sum C''_{ij}x_ix_j+\lambda\sum C'''_{ij}x_ix_j=0$$

给定, 其中 $\sum C''_{ij}x_ix_j=0$ 和 $\sum C'''_{ij}x_ix_j=0$ 是在基本点上的任意两条二次曲线 (正常的或退化的).

证明: 假定 $\sum C''_{ij}x_ix_j=0$ 和 $\sum C'''_{ij}x_ix_j=0$ 是(33)式分别取 $\lambda=\lambda_1$ 和 $\lambda=\lambda_2\neq\lambda_1$ 而得到的. 考虑

$$\begin{aligned}(\text{i})\qquad & \sum C''_{ij}x_ix_j+\lambda\sum C'''_{ij}x_ix_j \\ & =(\sum C_{ij}x_ix_j+\lambda_1\sum C'_{ij}x_ix_j)+\lambda(\sum C_{ij}x_ix_j+\lambda_2\sum C'_{ij}x_ix_j) \\ & =(1+\lambda)\sum C_{ij}x_ix_j+(\lambda_1+\lambda\lambda_2)\sum C'_{ij}x_ix_j=0,\end{aligned}$$

或 (ii)

$$\sum C_{ij}x_ix_j+\mu\sum C'_{ij}x_ix_j=0,$$

其中 $\mu=\frac{\lambda_1+\lambda\lambda_2}{1+\lambda}$ $(\lambda\neq-1)$ 或 $\mu=\infty(\lambda=-1)$. 因为 $(1+\lambda)\mu=\lambda_1+\lambda\lambda_2$ 对 λ 或 μ 来说都是线性的,所以(ii)和(33)是同一个束的方程.

17.11 求在点 Q: (1, 0, 1), R: (1, 1, 0), T: (1, 1, 1) 上且与 p: $x_1+x_2+x_3=0$ 切于 P: (−1, 0, 1) 的二次曲线方程.

解: 在 Q, R 上且与 p 切于 P 的二次曲线束中, 有两条退化二次曲线——p, QR 和 PQ, PR. 于是,这个束的方程是

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2-x_3)+\lambda x_2(x_1-x_2+x_3)=0.$$

取 $\lambda=3$,得出束中在 T 上的二次曲线方程

$$x_1^2-4x_2^2-x_3^2+3x_1x_2+x_2x_3=0.$$

17.12 求二次曲线的方程, 它和 $\mathscr{C}$: $x_1^2+x_2^2-4x_3^2-2x_1x_2+3x_1x_3=0$ 有二重切点 P: (1, 1, 0),简单交点 Q: (1, 0, 1) 和 R: (1, 2, 1),且在 T: (1, 1, 2) 上.

解: $\mathscr{C}$ 在P处的切线是 p: $x_3=0$. 所求的二次曲线在下列曲线束中,这个曲线束有两条退化曲线: $\mathscr{C}''=p$, QR: $x_3(x_1-x_3)=0$ 和 $\mathscr{C}'''=PQ$, PR: $(x_1-x_2-x_3)(x_1-x_2+x_3)=0$, 因而束的方程是

$$x_3(x_1-x_3)+\lambda(x_1-x_2-x_3)(x_1-x_2+x_3)=0,$$

取 $\lambda=-\frac{1}{2}$, 得所求的二次曲线方程

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3=0.$$

17.13 求二次曲线的方程,它在 T: (0, 1, 0) 上,且和 $\mathscr{C}$: $x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3=0$ 有四重切点 P: (1, 0, 1).

解: $\mathscr{C}$ 在 P 处的切线是 p: $x_1+2x_2-x_3=0$. 和 $\mathscr{C}$ 有四重切点 P 的曲线束中的每一条二次曲线都以 p 作为它在 P 处的切线. 这个束仅有一条退化二次曲线(计算两次), 于是束的方程为

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+\lambda(x_1+2x_2-x_3)^2=0.$$

取 $\lambda=-\frac{1}{4}$, 得出所求的二次曲线方程

$$3x_1^2-5x_3^2+4x_1x_2+2x_3x_1+12x_2x_3=0.$$

§17.3 补 充 题

17.14 求在点 R: (1, 0, −1), S: (1, 0, 1), T: (1, 2, 1), U: (1, 2, −1), V: (1, 3, 0)上的二次曲线 $\mathscr{C}$ 的方程.

提示: 取 R, S 为生成 $\mathscr{C}$ 的射影束 $\{Ax\}+\lambda\{Bx\}=0$ 和 $\{Dx\}+\lambda\{Ex\}=0$ 的中心. 设 $\lambda=\infty$, 0, 1 时分别得到点 T, U, V, 则 RU: $x_1+x_3=0$, RT: $x_1-x_2+x_3=0$, RV: $3x_1-x_2+3x_3=0$; 所以 $\{Ax\}=2x_1+2x_3=0$ 和 $\{Bx\}=x_1-x_2+x_3=0$. 同理, $\{Dx\}=x_1-x_2-x_3=0$ 和 $\{Ex\}=2x_1-2x_3=0$.

答案: $3x_1^2+2x_1x_2-x_2^2-3x_3^2=0$.

17.15 求在 S: (0, 3, 1) 与 $x_2-3x_3=0$ 相切且在点 R: (1, 2, 1), T: (−1, 2, 1), U: (2, 0, 1)上的二次曲线方程.

提示：选择 RU 和 RT 的表达式 $\{Ax\}=0$ 和 $\{Bx\}=0$，使得 RS: $\{Ax\}+\{Bx\}=0$，选择 SU 和 ST 的表达式 $\{Dx\}=0$ 和 $\{Ex\}=0$，使得 $\{Dx\}+\{Ex\}=x_2-3x_3=0$.

答案：$6x_1^2-x_2^2+11x_2x_3-24x_3^2=0$.

17.16 求在直线 r: [0, 1, 1], s: [1, 0, 1], t: [1, 1, 1], u: [1, 1, 0], v: [2, 6, 5] 上的二次曲线方程.

答案：$3X_1^2+X_2^2-4X_3^2-4X_1X_2+X_1X_3+3X_2X_3=0$.

17.17 求与 $2x_1+x_2+x_3=0$ 切于 $(-1, 1, 1)$，与 $2x_1-x_2-2x_3=0$ 切于 $(1, 0, 1)$，且与 $x_2+2x_3=0$ 相切的二次曲线方程.

答案：$5X_1^2-38X_1X_2+24X_1X_3+108X_2^2-146X_2X_3+46X_3^2=0$.

17.18 证明：$10x_1-x_2+8x_3=0$ 与例 17.1 中的二次曲线相切.

提示：先从(i)和直线方程消去 x_2，然后证明它是(ii)中的一条直线.

17.19 求二次曲线

$$[x_1, x_2, x_3]\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

和下列两点连线的交点(如果有的话)：

(a) (2, 1, 0) 和 (1, 2, 1)；(b) (0, 3, 2) 和 (4, 1, −4)；(c) (2, 1, 0) 和 (1, −1, −1).

答案：(a) (3, 0, −1), (1, −4, −3)；(b) (2, −1, −3).

17.20 (a) 用直线坐标写出习题 17.19 中二次曲线的方程.

(b) 求这条二次曲线上在点 (2, −1, 2) 上的直线.

提示：在 (2, −1, 2) 上任一直线的方程为

$$ax_1+2(a+c)x_2+cx_3=0.$$

答案：(a)

$$[X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix}4 & 7 & -5\\ 7 & 1 & -5\\ -5 & -5 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0.$$

(b)

$$x_1-2x_2-2x_3=0,\ x_1+8x_2+3x_3=0.$$

17.21 求二次曲线的方程，它的五条直线是：p: [1, 0, −1], q: [1, 2, 1], r: [1, 2, −1], s: [1, 0, 1], t: [1, 1, 2].

答案：$X_1^2-3X_2^2-X_3^2+6X_1X_2=0$.

17.22 (a) 证明：若 $p_1^2+p_2^2-p_3^2>0$，则 P: (p) 在二次曲线 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 的外部.

(b) 证明：若 P: (p) 在 (a) 中二次曲线的内部，则在 P 上的每一条直线与二次曲线交于两个不同点.

17.23 证明：每一个关于二次曲线的自配极三角形恰好有一个顶点在二次曲线内部.

17.24 证明：任何二次曲线 $\mathscr{C}$ 的方程可化简为

$$x_1^2-x_2x_3=0.$$

提示：取 $\mathscr{C}$ 上的 A_2: (0, 1, 0), A_3: (0, 0, 1) 和 A_2A_3 的极点 A_1 为坐标三角形 $A_1A_2A_3$ 的顶点，再在 $\mathscr{C}$ 上取 E: (1, 1, 1).

17.25 求内切于坐标三角形的二次曲线的方程.

提示：若 $x_1=0$ 与 $\sum C_{ij}x_ix_j=0$ 相切，则 $C_{23}^2=C_{22}\cdot C_{33}$.

答案：$C_{11}x_1^2+C_{22}x_2^2+C_{33}x_3^2+2\sqrt{C_{11}\cdot C_{22}}\,x_1x_2+2\sqrt{C_{33}\cdot C_{11}}\,x_3x_1+2\sqrt{C_{22}\cdot C_{33}}\,x_2x_3=0$.

17.26 设 P 点不在 $\mathscr{C}$ 上，P 关于 $\mathscr{C}$ 的极线为 p，Q 是 $\mathscr{C}$ 上任一点，$\mathscr{C}$ 在 Q 处的切线为 q. 证明：$p\cdot PQ$ 和 $p\cdot q$ 是共轭点.

17.27 设 A, B, P 是二次曲线的不同点，证明：PA, PB 被 P 处的切线 p, P 和 AB 的极点的连线调和分隔.

17.28 设 A, B 是关于 $\mathscr{C}$ 的共轭点. 在 A 上取直线 r 交 $\mathscr{C}$ 于 P, Q; BP, BQ 又分别交 $\mathscr{C}$ 于 R, S. 证明：A, R, S 共线.

17.29 证明：若完全四点形内接于二次曲线 $\mathscr{C}$，则它的对角三角形关于 $\mathscr{C}$ 是自配极的.

提示：取四点形的顶点为坐标三角形的顶点和单位点.

17.30 (a) 证明：顶点是 A: (1, 0, 1), B: (1, −1, 0), C: (1, 1, −1) 的三角形关于二次曲线

$$\mathscr{C}: 4x_1^2+16x_2^2+7x_3^2-16x_1x_2-2x_3x_1+22x_2x_3=0$$

是自配极的.

(b) 若把自配极三角形作为坐标三角形，则 $\mathscr{C}$ 的方程为

$$9x_1'^2+36x_2'^2-9x_3'^2=0.$$

提示：利用

$$X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}X'=A^{-1}X'.$$

(c) 求 $X'=AX$，并验证：它也是把自配极三角形作为坐标三角形.

(d) 在(b)中引进变换

$$X'=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}X''=B^{-1}X'',$$

并验证：由 $X=A^{-1}B^{-1}X''$ 可以推出 $\mathscr{C}$ 的方程为

$$x_1''^2+x_2''^2-x_3''^2=0.$$

(e) 证明：$X''=BAX$ 保持坐标三角形和相应的单位点 E: (5, 1, 0) 不变.

17.31 (a) 证明：顶点为 A: (1, −1, 0), B: (7, −3, −4), C: (1, 3, 4) 的三角形内接于二次曲线

$$\mathscr{C}: x_1^2+x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3=0.$$

(b) 证明：若把这个三角形作为坐标三角形，则 $\mathscr{C}$ 的方程为 $x_1'x_2'-x_3'x_1'+4x_2'x_3'=0$.

(c) 证明：变换 $x_1'=4x_1''$, $x_2'=x_2''$, $x_3'=x_3''$ 把 $\mathscr{C}$ 的方程化简为 $x_1''x_2''-x_3''x_1''+x_2''x_3''=0$.

(d) 求实现上述化简的变换 $X''=AX$ 的方程，证明相应于三角形 ABC 的单位点是 E: (3, −1, 0).

17.32 证明：恰好有一条二次曲线在点 (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) 上且与 ax_1+

$bx_2-(a+b)x_3=0$ 切于 $(1, 1, 1)$.

17.33 证明：若 PQR 不是关于 $\mathscr{C}$ 的自配极三角形，则它的各顶点极线交对边于共线点.

17.34 若一个三角形的顶点是另一个三角形关于 $\mathscr{C}$ 的极点，证明：第二个三角形的顶点是第一个三角形的边的极点. 每一个三角形称为另一个三角形的配极三角形. $\mathscr{C}$ 的内接三角形的配极三角形是什么?

17.35 证明：配极三角形是透视的，透视中心和透视轴是极点和极线的关系.

17.36 C 和 E 是关于二次曲线 $\mathscr{C}$ 的共轭点，D 是 $\mathscr{C}$ 上一点. 若 DC 和 DE 再与 $\mathscr{C}$ 分别交于 F 和 G，证明：(a) CE 和 FG 是关于 $\mathscr{C}$ 的共轭线；(b) CG 和 EF 交点在 $\mathscr{C}$ 上.

提示：如习题 17.5 那样取坐标三角形，在 $\mathscr{C}$ 上取 D: $(1, 1, 1)$，则 AB 上的 E: $(1, \alpha, 0)$ 共轭于 C.

17.37 取内接三角形作为三角形 ABD，其中 A: $(1, 0, 0)$, B: $(0, 1, 0)$, D: $(1,1,1)$；取 C: $(0, 0, 1)$ 作为 AB 边的极点，证明习题 17.15.

17.38 设点 Y: (y) 和 Z: (z) 在二次曲线束 (33) 上，但不是它的基本点. 证明：(a) Y 关于曲线束 (33) 的极线组成一个直线束. (b) 直线束的中心和 Y 关于曲线束中的每一条二次曲线都是共轭的. (c) 直线 YZ 关于曲线束(33)的极点在

$$\sum c_{ij}y_ix_j\cdot\sum c'_{ij}z_ix_j-\sum c_{ij}z_ix_j\cdot\sum c'_{ij}y_ix_j=0$$

上.

17.39 证明：完全四点形 $PQRS$ 的对角三角形是由 P, Q, R, S 确定的在四点形上的二次曲线束中每条二次曲线的自配极三角形.

提示：取四点形的顶点为$(1, \pm1, \pm1)$和$(1, \pm1, \mp1)$.

17.40 证明：外接于习题 17.39 中的四点形 $PQRS$ 的二次曲线 $\mathscr{C}$ 和内切于四线形 $pqrs$(p, q, r, s 分别为$\mathscr{C}$ 在 P, Q, R, S 处的切线)的二次曲线有公共的自配极三角形.

17.41 证明：若四点形中的二次曲线与不在顶点上的直线 p 相交，则交点是 p 上一个对合的互逆对，这个对合由 p 和四点形的两组对边的交点所确定.

17.42 习题 17.41 中的对合什么时候是双曲型的？什么时候是椭圆型的？

17.43 设从点 Y: (y) 能作 $\mathscr{C}$: $\sum c_{ij}x_ix_j=0$ 的两条切线，证明这些切线的方程是

$$\sum c_{ij}y_iy_j\cdot\sum c_{ij}x_ix_j-(\sum c_{ij}y_ix_j)^2=0.$$

17.44 求与 $x_1-x_2+x_3=0$ 切于 P: $(1, 2, 1)$，与 $x_1+x_2-x_3=0$ 切于 R: $(1, 0, 1)$，且在 T: $(1, 1, -1)$ 上的二次曲线的方程.

答案：$7x_1^2-4x_2^2-x_3^2-6x_1x_3+8x_2x_3=0$.

17.45 求在 T: $(1, -1, 1)$ 上且与 $x_1^2+x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-4x_3x_1+6x_2x_3=0$ 有二重切点 P: $(1, 1, 0)$ 和 R: $(1, 0, 1)$ 的二次曲线的方程.

答案：$2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-5x_3x_1+6x_2x_3=0$.

17.46 求与 $x_1^2-2x_2^2+x_1x_2-x_3x_1-x_2x_3=0$ 有三重切点 P: $(1,0,1)$ 且在点 Q: $(1,1,0)$ 和 T: $(1, 0, 0)$ 上的二次曲线的方程.

答案：$2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-x_3x_1+2x_2x_3=0$.

17.47 证明：若 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 是四个不同点上的两条二次曲线，Y 是平面上任一点，则 Y 关于由 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 确定的曲线束中的二次曲线的极线

(a) 是相同的(当 Y 是一条退化二次曲线的奇异点时),

(b) 否则,它们组成直线束,并指出直线束的中心(要讨论两种情况).

17.48 证明:四点形上的二次曲线束中的二次曲线有唯一一个公共的自配极三角形.

17.49 证明若 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 是不同的二次曲线,它们在不同点 P 和 R 上有二重切点,则由它们确定的束中的二次曲线有无数个公共的自配极三角形.

提示:从在 P 和 R 处的公切线的交点 $A=p\cdot r$ 开始.

17.50 叙述并证明习题 17.47~17.49 的对偶.

17.51 若关于曲线束中的每一条二次曲线,Y' 都共轭于 Y,则称 Y' 关于曲线束共轭于 Y. 对于四点形上的二次曲线束,证明:(a) 不在公共的自配极三角形上的点是成对共轭的;(b) 自配极三角形的一边上的每一点都与这边的对顶点共轭;(c) 一个顶点与其对边上每一点共轭(对边上的顶点除外).

17.52 证明:巴斯卡定理:若简单六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 内接于二次曲线,则它的三对对边交点 $R=A_1A_2\cdot A_4A_5$, $S=A_2A_3\cdot A_5A_6$, $T=A_3A_4\cdot A_6A_1$ 共线.

提示:设 $\mathscr{C}$: $\sum C_{ij}x_ix_j=0$ 在 A_1 和 A_2 处的切线交于 B. 取 A_1: $(1, 0, 0)$, A_2: $(0, 1, 0)$, B: $(0, 0, 1)$ 和 A_3: $(1, 1, 1)$; 则有 $\mathscr{C}$: $x_3^2=x_1x_2$. 取 A_4: $(1, a^2, a)$, A_5: $(1, b^2, b)$, A_6: $(1, c^2, c)$.

17.53 取六边形的三个顶点为坐标三角形的顶点,取 (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) 为剩下的顶点,证明巴斯卡定理.

17.54 利用习题 17.52 中的二次曲线及其内接六边形,证明外切六边形(它的各边分别是 $\mathscr{C}$ 在 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 处的切线 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) 的布利安桑点是巴斯卡线 RST 的极点.

第十八章　射影几何、仿射几何和欧氏几何

§18.1　基本内容

1. 射　影　群

我们说,所有非奇异 n 阶方阵的集合 G 关于乘法构成一个群. 因为,当 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 为 G 中任意矩阵时,有

(i) $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 在 G 中(封闭性).

(ii) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$(结合性).

(iii) 在 G 中存在矩阵 $\boldsymbol{I}$(单位矩阵)使得 $\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$.

(iv) 对于 G 中每一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 G 中的矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$($\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵)使得 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

如果在 G 中还有:

(v) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 G 中任意矩阵)(交换律),则群 G 称为交换群或阿贝尔群. 非奇异 n 阶方阵所成的群 G 是非阿贝尔群.

当用齐次坐标来表示时,直线到自身的射影变换实质上是非奇异的 2 阶方阵,而平面到自身的射影变换实质上是非奇异 3 阶方阵. 若把两个矩阵的乘积解释为两个变换相继施行的结果(见习题 16.43), 则有

定理 18.1　直线到自身的所有变换的集合构成一个非阿贝尔群.

定理 18.2　所有形如

$$\rho X'=EX,\ |\boldsymbol{E}|\neq 0 \tag{1}$$

的平面到自身的射影变换(直射变换)的集合构成一个非阿贝尔群,称为一般射影群 $\mathscr{T}$.

直线上的射影几何的内容由在定理 18.1 的群下保持不变的那些点集的性质所组成. 平面上射影几何的内容由在定理 18.2 的群下保持不变的那些平面图形的性质所组成. 注意,可不考虑平面而研究直线上的射影几何, 也可把这种研究作为以这条直线为二重线的对平面所有直射变换的研究的副产品而得到.

2. 射影群的子群

若 G' 是群 G 的元素所组成的非空子集且 G' 本身满足群的条件,则称 G' 是 G 的子群. 例如,G 中所有行列式为 ±1 的矩阵所成的子集是 G 的子群. 而这个子群(从而群 G)又有一个由 G 中所有行列式为 $+1$ 的矩阵所成的子群. G 的子集 G' 是子群的基本条件是: (i) G' 含有它的每一个元素的逆,(ii) 对于 G' 中的每一对 A, B, G' 含有 AB. 因此由 G 中所有行列式为 -1 的矩阵所成的子集不是子群. 我们在这里不想对 $\mathscr{T}$ 的子群作彻底研究,

在以后几节中我们要接着考虑某些有趣的子群.

在平面内任取一条直线 l 并选择一个坐标系,使得 l 为坐标三角形的边 $x_3=0$,形如

$$\begin{aligned}\rho x_1'&=e_{11}x_1+e_{12}x_2+e_{13}x_3,\\ \rho x_2'&=e_{21}x_1+e_{22}x_2+e_{23}x_3,\\ \rho x_3'&=\qquad\qquad\qquad e_{33}x_3,\end{aligned}\qquad |E|=e_{33}\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}\\ e_{21}&e_{22}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{2}$$

的直射变换以 x_3 为二重(不动)直线. 我们留给读者证明,所有形如 (2) 的直射变换的集合构成 $\mathscr{T}$ 的一个子群 $\mathscr{T}_a$.

考虑 $\mathscr{T}_a$ 中形如

$$\begin{aligned}\rho x_1'&=e_{11}x_1\qquad\quad +e_{13}x_3,\\ \rho x_2'&=\qquad e_{11}x_2+e_{23}x_3,\\ \rho x_3'&=\qquad\qquad\quad e_{33}x_3,\end{aligned}\qquad e_{11}\cdot e_{33}\neq 0 \tag{3}$$

的元素,由于(3)在 $x_3=0$ 上得到的是恒等变换(证明 (1, 0, 0), (0, 1, 0) 和 (1, 1, 0) 是不动点),因此,$x_3=0$ 是这些变换的二重点的直线. 而且,所有形如 (3) 的 $\mathscr{T}_a$ 的元素所成子集构成 $\mathscr{T}_a$ 的一个子群(证明这点),因此也构成了 $\mathscr{T}$ 的一个子群,这个子群由透视(当 $e_{11}\neq e_{33}$ 时)和平射(当 $e_{11}=e_{33}$ 时)所组成.

3. 仿 射 几 何

在第十三章中,我们得到仿射平面的方法是:从射影平面中挑选出一条直线 l,赋于这条直线特殊性质并称它为理想直线. 或者从射影平面中除去这条直线. 取 l 为坐标三角形的边 $x_3=0$,由此推出,形如(2)的直射变换可以解释为那些使理想直线保持不变或使仿射平面(适合 $x_3\neq 0$ 的全体点 (x_1, x_2, x_3) 变到自身的变换.

采用齐次坐标,仿射平面的每一个点可由形如 $(x_1, x_2, 1)$ 的坐标给出;采用非齐次坐标,仿射平面的每一个点可以写成 (x_1, x_2) 的形式. 采用齐次坐标,(2)式可以写成

$$\begin{aligned}x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ x_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ x_3'&=\qquad\qquad\qquad x_3,\end{aligned}\qquad |A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{2a}$$

(2a)中的每一个系数是(2)中相应系数除以 $e_{33}\neq 0$. 采用非齐次坐标形式,(2)可以写成

$$\begin{aligned}x'&=a_{11}x_1+a_{12}y+a_{13},\\ y'&=a_{21}x\ +a_{22}y+a_{23}\end{aligned}\qquad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

平面仿射几何的内容是由那些在仿射变换群下保持不变的仿射平面的图形的性质所组成的.

4. 坐 标 系

从射影平面变到仿射平面时,可能使用(射影平面的)坐标三角形失去边 $x_3=0$,那时剩下的边 $x_2=0$ 和 $x_1=0$,取作坐标轴——$x_2=0$(x_1 沿着此轴变化)为 x_1 轴(非齐次坐标形式即为 x 轴)和 $x_1=0$(x_2 沿着此轴变化)为 x_2 轴(非齐次坐标形式即为 y 轴). 这两个轴的交点 (0, 0, 1)或(0, 0)称为*原点*. x 轴和 y 轴上的理想点分别是(1, 0, 0)和(0, 1, 0).

在后面的内容中,当使用非齐次坐标比较方便的时候,我们就使用非齐次坐标. 然而,为了给射影定理以射影解释,齐次坐标还是必要的. 在这种场合,将采用使 $x_3=1$ 的特殊仿

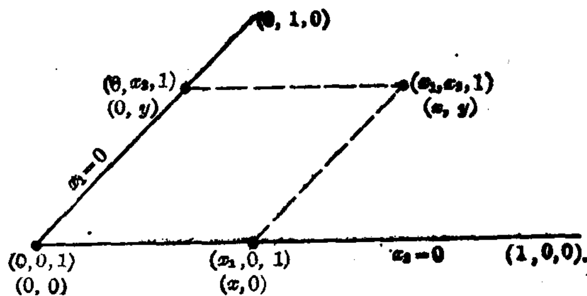


图　18-1

射坐标集.

5. 仿 射 变 换

仿射变换(2a)把点变到点，直线变到直线；它们还保留共线性和共点性．如果两条仿射直线不相交(它们的交点在理想直线上)，我们就称这两条仿射直线平行．因为仿射变换保持理想直线不变，所以它们把平行的仿射直线变到平行的仿射直线．因此，仿射变换保持平行性．

其次，考虑在一条仿射直线上的不同点 $P: p$, $Q: q$, $R: r$ 和 $S: s$．由于在仿射变换下，交比$(P, Q; R, S)$保持不变(见第十六章)，因此当这些点是仿射点时，同样的事实在仿射变换下也成立．假定 P, Q, R 是直线 l 上的仿射点，但 $S=P_\infty$ 是直线 l 上的理想点．一个一般的仿射变换把这些点分别变到直线 l' 上的点 P', Q', R', P'_∞．由于

$$(P, Q; R, P_\infty)=\frac{p-r}{q-r}=(P', Q'; R', P'_\infty),$$

所以线段 PQ 被 R 所分的两线段的比是仿射不变量．

最后，设 $A: (a_1, a_2, 1)$, $B: (b_1, b_2, 1)$, $C: (c_1, c_2, 1)$ 是仿射平面的三个不共线点，定义三角形 ABC 的度量 μ 为

$$\mu=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

(读者不难看出，不考虑符号，μ 就是以单位平方表示的三角形 ABC 面积的两倍，也会记起度量的符号依赖顶点坐标在行列式中的顺序，即三角形旋转的方向．我们取 $O: (0, 0, 1)$, $H: (1, 0, 1)$, $J: (0, 1, 1)$ 为顶点和度量．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=+1$$

的三角形 OHJ 为度量单位(见图 8-2(a))．注意：当我们绕着三角形 OHJ——从 O 到 H 到 J 再返回到 O——运动时，这个三角形(把它看作以直线段为界的平面部分)总是位于我们的左边，图 18-2(b) 中的三角形 ABC 的度量是正的，而图 18-2(c) 中的三角形 $A'B'C'$ 的度量是负的．仿射变换(2a)把单位三角形变到度量为 $|\boldsymbol{A}|$ 的三角形，把度量为 μ 的三角形变到度量为 $\mu|\boldsymbol{A}|$ 的三角形．因此仿射变换保持三角形度量的比不变．

$|\boldsymbol{A}|=+1$ 的仿射变换保持三角形的度量和转向不变，$|\boldsymbol{A}|=-1$ 的仿射变换保持度量

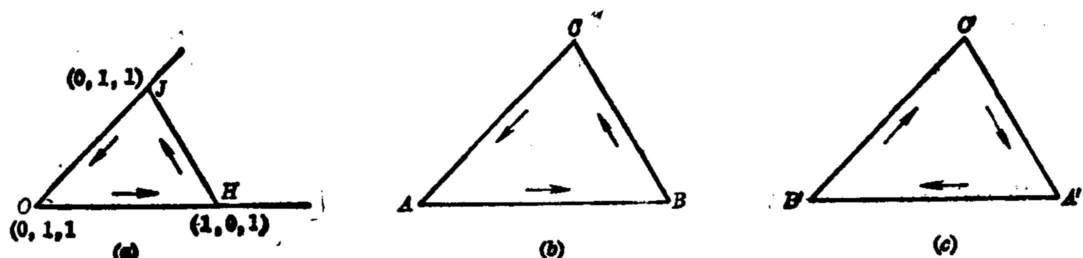


图 18-2

的绝对值不变，但是改变度量的符号，即改变三角形的方向，使得 $|A|=+1$ 的所有仿射变换的集合构成一个群．这个群的元素称为等仿射变换或特殊仿射变换．使得 $|A|=-1$ 的所有仿射变换的集合不构成一个群．因为两个这样的变换的乘积是一个等仿射变换.因此，所有使得 $|A|=\pm1$ 的仿射变换的集合构成一个群．这个群中的元素称为乘积变换.

具有齐次坐标形式

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{11}x_2 + a_{23}x_3, \quad a_{11}\neq 0 \\ x_3' &= x_3, \end{aligned} \tag{3a}$$

和非齐次坐标

$$\begin{aligned} x' &= ax + b_1, \\ y' &= ay + b_2, \end{aligned} \quad a\neq 0$$

的仿射变换称为位似变换．所有位似变换的集合形成一个群 $\mathscr{T}_h$（证明这点），它是 $\mathscr{T}_a$ 的子群．除去恒等变换以外，$\mathscr{T}_h$ 中每个元素都有一条完全由二重点组成的二重直线（轴），——理想直线 $x_3=0$——和唯一一个由 $(a_{13},\ a_{23},\ 1-a_{11})$ 给出的二重点（中心）.

在位似变换下对应的两条直线 p 和 p' 是平行的．换句话说，位似变换把仿射直线 p 变成平行于 p 的仿射直线 p'．因此，在位似变换下，一个三角形变为另一个三角形时，它们的对应边互相平行．由于这两个三角形通过理想直线（变换轴）成透视，所以它们也通过一点成透视，这个点就是变换中心.

位似变换可以分为两类——以仿射点为中心（即 $a_{11}\neq1$）的伸缩和以理想点为中心（即 $a_{11}=1$）的平移．所有平移的集合构成一群（证明这点）；而所有的伸缩的集合不是一个群.

在位似变换下，对应的两个三角形称为位似形，或用更熟悉的术语来说，这两个三角形是相似的或相似放置的.

6．平面欧氏几何

读者可以回忆一下，欧氏几何（中学平面几何）既研究相似三角形又研究全等三角形，也就是说，既研究图形的仿射性质、又研究图形的度量性质．为了验证全等，即比较两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 对应边的长度，必须有一个在平面的所有直线上都起相同作用的度量单位．因此，又需要垂线的定义（见第十四章）．由此引导我们把欧氏变换定义为保持垂直性的保积变换.

考虑理想直线 $x_3=0$ 的椭圆型对合

$$\begin{aligned} x_1' &= C_{11}x_1 + C_{12}x_2, \\ x_2' &= C_{21}x_1 \quad C_{11}x_2, \end{aligned} \quad C_{11}^2 + C_{12}C_{21} < 0 \tag{4}$$

射影变换.

$$x_1' = C_{21}x_1 - C_{11}x_2,$$
$$x_2' = -C_{11}x_1 - C_{12}x_2,$$
$$x_3' = (C_{11}^2 + C_{12}C_{21})x_3$$

把(4)化简为在 $x_3=0$ 上的点的齐次坐标形式

$$x_1' = x_2,\ x_2' = -x_1 \tag{5}$$

或非齐次坐标形式

$$x' = -\frac{1}{x}. \tag{6}$$

今后我们总假定椭圆型对合(5)在 $x_3=0$ 上并称它为绝对对合.

设仿射平面的直线 p 交 $x_3=0$ 于 P_∞: $(x_1, x_2, 0)$. 在绝对对合下, 点 P_∞ 和 P'_∞: $(x_2, -x_1, 0)$ 互相对应, 即 P_∞ 和 P'_∞ 是这个对合的互逆对, 我们规定在 P'_∞ 上的任意仿射直线 p' 都垂直于 p, 在保持这个绝对对合不变的任一射影变换下, 这个绝对对合的互逆对 P_∞, P'_∞ 变到互逆对 Q_∞, Q'_∞. 相应地, 垂直直线对 p, p' 变到垂直直线对 q, q'.

保积变换

$$\rho X' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{7}$$

是保持理想直线 $x_3=0$ 不变的仿射变换. 如果(7)还保持在 $x_3=0$ 上的绝对对合不变, 它就必须把任意互逆对 $P_\infty(x_1, x_2, 0)$ 和 $P'_\infty(x_2, -x_1, 0)$ 变为这个绝对对合的互逆对:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\ 0) \text{和} (a_{11}x_2 - a_{12}x_1,\ a_{21}x_2 - a_{22}x_1,\ 0).$$

因此, 一定存在一个非零数 k, 使得

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = k(a_{21}x_2 - a_{22}x_1),$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -k(a_{11}x_2 - a_{12}x_1)$$

或

$$(a_{11} + ka_{22})x_1 + (a_{12} - ka_{21})x_2 = 0,$$
$$(a_{21} - ka_{12})x_1 + (a_{22} + ka_{11})x_2 = 0.$$

为了使这些关系与互逆对的选择无关, 每个系数都必须为零, 因此

$$K = -\frac{a_{11}}{a_{22}} = -\frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{21}} = \frac{a_{21}}{a_{12}}$$

或

$$a_{11}^2 = a_{22}^2,\ a_{12}^2 = a_{21}^2,\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0.$$

从而(7)的形式是

$$\begin{aligned} x' &= ax - by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned} \quad a^2 + b^2 = 1 \tag{7a}$$

或

$$\begin{aligned} x' &= ex + fy + g, \\ y' &= fx - ey + h, \end{aligned} \quad e^2 + f^2 = 1. \tag{7b}$$

变换(7a)和(7b)的全体组成欧氏变换群.

7. 长　度

设 A: (x_1, y_1) 和 B: (x_2, y_2) 是两不同点, 这两点间的距离 AB 的定义必须满足条件:

(i) $AB=0$ 的充要条件是 $A=B$ 成立.

(ii) $AB=BA$(我们是定义距离而不是有向距离).

(iii) 对任意三点 A, B, C, $AB+BC\geqslant AC$ 成立(三角形性质).

我们留给读者证明

$$AB=(+)\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}\tag{8}$$

满足上述要求.

我们现在证明(8)是欧氏变换群下的不变量. 考虑变换(7a), 它把

(x_1, y_1) 变到 $(x_1', y_1')=(ax_1-by_1+c,\ bx_1+ay_1+d)$, 把 (x_2, y_2) 变到 $(x_2', y_2')=(ax_2-by_2+c,\ bx_2+ay_2+d)$.

因此,

$$x_2'-x_1'=a(x_2-x_1)-b(y_2-y_1),$$

$$y_2'-y_1'=b(x_2-x_1)+a(y_2-y_1),$$

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2=(a^2+b^2)[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

用类似的方法可以验证(7b).

8. 角

考虑图 18-3 中从点 P 出发的两条半直线(射线). 暂时假定存在一个变换, 它保持 P 固定不变, 并把一条射线逐点变到另一条射线, 即把一条射线旋转到另一条射线上. 因此, 这样一个变换的逆把第二条射线转回到第一条射线上. 现在, 我们只考虑转向是逆时针方向的变换(旋转). 因此, 如果变换 τ 把 r_1 逆时针转到 r_2, 则有 τ^{-1} 把 r_2 逆时针方向转到 r_1.

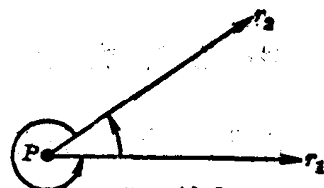


图 18-3

为了把问题简化, 设射线 OA 和 OB 的交点 O 是原点, OA 是正 x 轴.

$$\begin{aligned}x'&=ax-by,\\ y'&=bx+ay,\end{aligned}\qquad a^2+b^2=1\tag{9}$$

把 OA 逆时针方向转到 OB (见图 18-4). 由这两条射线连同相关的旋转 (9) 组成的图形称为角(AOB). 根据这个定义, (AOB) 是有向角并且总是正的. 同时这里所定义的角与第十四章的有向角在某些方面有所不同. 本质的区别(正如以后我们将见到的那样)是在这里角的大小没有限制. 注意(9)把 A_2: $(1, 0)$ 变到 B: (a, b).

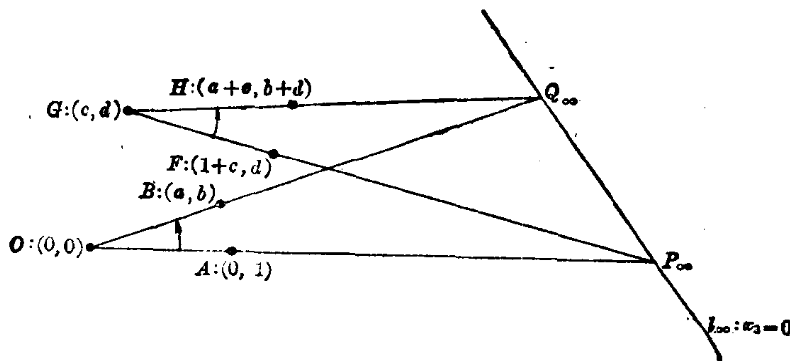


图 18-4

在平移

$$x'=x+c,\quad y'=y+d, \tag{10}$$

下，角 (AOB) 变到角 (FGH)，其中 $O:(0,0)$ 的像是顶点 $G:(c,d)$，$A:(1,0)$ 的像是 $F:(1+c,d)$，$B:(a,b)$ 的像是 $H:(a+c,b+d)$. 与 (FGH) 相关的是旋转

$$x'-c=a(x-c)-b(y-d),\quad y'-d=b(x-c)+a(y-d),\quad a^2+b^2=1 \tag{11}$$

旋转(9)和(11)有相同的系数，称它们为等价的．若两个相应角 (AOB) 和 (FGH) 有等价的旋转．则称为相等的．

反之，已知一个有相应于旋转(11)的角 (FGH)，我们总能得到一个顶点在原点、始边沿正 x 轴且与之等价的相应于旋转(9)的相等角．

再考虑具有相应于旋转 (9) 的角 (AOB)．在保积变换(7)下，点 A, O, B 分别对应于 $Q:(a_{11}+a_{13}, a_{21}+a_{23})$，$R:(a_{13}, a_{23})$，$S:(aa_{11}+ba_{12}+a_{13}, aa_{21}+ba_{22}+a_{23})$．如果 (AOB) 和 (QRS) 相等，则 Q 与 (QRS) 相应的旋转一定具有形式

$$x'-a_{13}=a(x-a_{13})-b(y-a_{23}),$$
$$y'-a_{23}=b(x-a_{13})+a(y-a_{23}).$$

这个旋转，把 Q 变到 $Q':(aa_{11}-ba_{21}+a_{13}, ba_{11}+aa_{21}+a_{23})$．而 Q' 在边 RS 上的充要条件是 $a_{12}=-a_{21}$ 且 $a_{11}=a_{22}$．因此，变换(7)把角变到相等的角的充要条件是它具有形式(7a)．

9. 角的度量

让我们假定具有相应于旋转(9)的角 (AOB) 有度量．相应于矩阵为 $\Delta=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 的旋转

$$x'=-y',\ y'=x \tag{12}$$

的角的度量记为 α．这里，(12)是(9)中 $a=0$，$b=1$ 的特殊情况．(12)的作用是把 O 上的射线 OR 逆时针旋转到垂直于 OR 的射线 OS．令 α 等于一个直角，由于

$$\Delta^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \Delta^3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\Delta^{-1}\ 和\ \Delta^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

因此绕 O 的一个回转等于四个直角．然而因为 $I^n=I(n=0, 1, 2, \cdots)$，所以与恒等变换相应的度量可以取作 0 个直角，4 个直角，8 个直角，……中的任何一个．

相应于旋转

$$x'=\frac{1}{2}\sqrt{3}x-\frac{1}{2}y,$$

$$y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{3}y\quad 和矩阵\quad \Delta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

的角的度量记为 β，由于

$$\Delta_1^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \Delta_1^3=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\Delta\ 和\ \Delta_1^{12}=I,$$

因此，$\beta=\frac{1}{3}$ 个直角，$\frac{13}{3}$ 个直角，$\frac{25}{3}$ 个直角，……. 从这些例子（读者还可以研究

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x'&=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{3}y,\\ y'&=\frac{1}{2}\sqrt{3}x-\frac{1}{2}y \end{aligned} \quad \text{和} \quad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} \sqrt{2}x'&=-x+y,\\ \sqrt{2}y'&=-x-y \end{aligned}$$

）我们得出结论：一个角用直角来度量时，它有一个满足 $0\leqslant\gamma\leqslant4$ 的值 γ（这值称为度量的主值），其它各值都可以在这个值上添加 4 个直角的正整数倍而得到. 当然在实用上，主值（θ 度）是由 $\cos\theta=a$, $\sin\theta=b$, $\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$ 中的任何两个通过查三角函数表得到的.

10. 概　　述

在这一章中，我们从一般的射影群 $\mathscr{T}$，即把射影平面变到自身的所有直射变换

$$X'=EX,\ |E|\neq0 \tag{1}$$

开始，这些直射变换把共线点（共点线）变到共线点（共点线）并保持交比不变.

然后，在平面内选择一条（任意）直线和一个以这条直线为坐标三角形的边 $x_3=0$ 的坐标系，我们得到 $\mathscr{T}$ 的一个子群 $\mathscr{T}_a$，它的元素保持 $x_3=0$ 不变，也就是说，$\mathscr{T}_a$ 是所有以 $x_3=0$ 为二重（固定）直线的直射变换的集合. 群 $\mathscr{T}_a$——称为一般仿射群——在仿射平面中保持直线的平行性. 点 R 分 PQ 的两段之比和两个三角形的度量之比不变. $\mathscr{T}_a$ 中 $|A|=\pm1$ 的子群称为保积群，它保持三角形的度量不变. 但不一定保持三角形的转向不变，保积群中 $|A|=+1$ 的子群称为等仿射群，它既保持三角形的度量又保持它的转向不变.

$\mathscr{T}_a$ 的子群 $\mathscr{T}_h$（每一个元素都具有形式(3a)）以直线 $x_3=0$ 为二重点直线. 这个群中的元素把直线变到与之平行的直线，从而把三角形变到与之相似的三角形.

最后，把仿射平面取作欧氏平面并在 $x_3=0$ 上确定一个椭圆型对合（称为绝对对合）后，定义与 $x_3=0$ 相交于这个绝对对合的互逆对的两条直线 p 和 p' 互相垂直. 所有保持绝对对合的保积变换定义为欧氏变换，这些变换保持距离和角不变. 但还是不一定保持角的转向不变.

考虑形如

$$\begin{aligned} x'&=ax-by+c,\\ y'&=bx+ay+d, \end{aligned}\quad a^2+b^2=1 \tag{7a}$$

的欧氏变换. 如果 $a=1$, $b=c=d=0$, (7a) 就是恒等变换；如果 $a=1$, $b=0$ 但 c 和 d 不同时为零，(7a)就是平移

$$\begin{aligned} x'&=x+c,\\ y'&=y+d; \end{aligned}$$

如果 $c=d=0$ (7a)就是旋转

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\theta-y\sin\theta,\\ y'&=x\sin\theta+y\cos\theta; \end{aligned}$$

在其它情况，(7a)相当于一个旋转

$$\begin{aligned} \bar{x}&=x\cos\theta-y\sin\theta,\\ \bar{y}&=x\sin\theta+y\cos\theta \end{aligned}$$

再接一个平移

$$x'=\bar{x}+c,$$
$$y'=\bar{y}+d.$$

显然，所有(7a)型的变换构成一个群，它是欧氏群的子群.

其次考虑形如

$$\begin{aligned}x'&=ex+fy+g,\\ y'&=fx-ey+h,\end{aligned}\quad e^2+f^2=1 \tag{7b}$$

的欧氏变换．二重点由

$$\begin{aligned}(e-1)x+fy&=-g,\\ fx-(e+1)y&=-h\end{aligned} \tag{13}$$

给出．由于$\begin{vmatrix}e-1 & f\\ f & -(e+1)\end{vmatrix}=0$；(13)中的两个方程或者代表相同的直线，或者代表不同的平行直线.

在第一种情况中，(7b)具有形式

$$\begin{aligned}x'&=ex+fy+g,\\ y'&=fx-ey+\frac{fg}{e-1},\end{aligned}\quad e^2+f^2=1. \tag{7b$_1$}$$

它的二重元素由二重点的直线 p：$(e-1)x+fy+g=0$ 和不在 p 上的二重点 P'_∞：$(e-1, f, 0)$所组成．因为 p 上的理想点 P_∞：$(-f, e-1, 0)$ 和 P'_∞ 是在这个绝对对合中的互逆对，所以 P'_∞ 上的每一条直线都垂直于 p．设 R：(r_1, r_2)是平面内的任意一点，它在变换(7b$_1$)下的对应点记为 R'．由于 R, R', P'_∞ 共线并且线段 RR' 的中点在 p 上(请读者证明)．因此，(7b$_1$)是关于直线 p 的正交反射(见图18-5，这里对应点的连线 AA', BB', CC', … 垂直于 p 且线段 AA', BB', CC'… 被 p 平分).

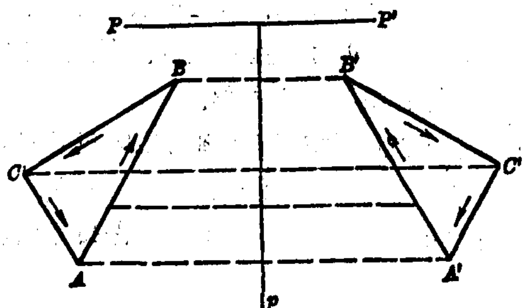


图　18-5

在第二种情况，(7b)是关于直线 $y=x\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$ 的正交反射

$$\bar{x}=x\cos\theta+y\sin\theta$$
$$\bar{y}=x\sin\theta-y\cos\theta$$

再接着一个平移

$$x'=\bar{x}+g,$$
$$y'=\bar{y}+h.$$

我们通常把欧氏变换解释为刚体运动，例如，平面上的一个三角形在这个刚体运动下变到这个平面上的另一个位置．在刚体运动下，对应的两个三角形称为全等三角形，看作刚体运动的(7b)型的变换是普通三维空间的一个完全或部分位移．这是因为关于一条直线的正交反射等价于(有相同的效果)绕这条直线的旋转．也就是说，因为反射改变角的转向，它的

作用(见图 18-5)仅相当于把这个角翻转并放置在这个平面的完全确定的位置上. 相反地，当我们把(7a)型的变换看作刚体运动时，它完全是在平面上的位移. 于是这些(7a)型的变换是平面解析几何中的变换. 例如，二次曲线的方程可通过这些变换化简为标准形式，只是为了方便，才把这些变换用逆形式

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi+c',$$
$$y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+d'$$

给出.

附录 矩阵代数

1. 定义

包含在一对括号内且规定了后面将给出的一些运算的矩形数阵称为矩阵．例如：

(a) $[1, 2, 3]$，　　(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$，

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，　　(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$．

含有m行n列的矩阵称为$m\times n$矩阵．当$m=n$时，称为n级方阵．例如，(a) 是1×3矩阵，(b) 是3级方阵，(d) 是3×1矩阵．

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ 中，数a_{ij}称为它的元素．这里我们用了两个下标，第一个下标表示元素所在的行，第二个下标表示元素所在的列．于是，a_{24}是位于第二行、第四列处的元素；第三行全体元素的第一个下标都是3；第一列全体元素的第二个下标都是1．上面这个矩阵也可写成

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\,(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

若矩阵的级已经确定，我们就记为"$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$"或"矩阵$\boldsymbol{A}$"．

全体元素都是实数的矩阵称为实矩阵．这里我们所研究的矩阵都理解为实矩阵．

2. 矩阵的加法

两个同级矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$可以相加（或相减），结果得到一个同级矩阵，其元素是两个矩阵对应元素的和（或差）．于是，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=[a_{ij}-b_{ij}]$；$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=[b_{ij}-a_{ij}]$．

例 1

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1+0 & 3-2 & 1+3 \\ 2+1 & 1+1 & 4+1 \\ 4+4 & 7+0 & 6+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1-0 & 3+2 & 1-3 \\ 2-1 & 1-1 & 4-1 \\ 4-4 & 7-0 & 6-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$B-A=\begin{bmatrix}0-1 & -2-3 & 3-1\\ 1-2 & 1-1 & 1-4\\ 4-4 & 0-7 & 2-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -5 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ 0 & -7 & -4\end{bmatrix}.$$

$$A+A+A=\begin{bmatrix}3 & 9 & 3\\ 6 & 3 & 12\\ 12 & 21 & 18\end{bmatrix}=3A.$$

对任一实数p我们规定$pA=[pa_{ij}]$. 特别地，$(-1)A=[-a_{ij}]=-[a_{ij}]$. 于是，在例1中，$B-A=-(A-B)$.

3. 矩阵的乘法

若A的列数等于B的行数，则A, B两个矩阵称作按$A\cdot B$的顺序是可相乘的，若B的列数等于A的行数，则A, B称作按$B\cdot A$的顺序是可相乘的. 两个n级方阵A, B既按$A\cdot B$的顺序也按$B\cdot A$的顺序是可相乘的. 但是，一般来说$A\cdot B\neq B\cdot A$.

若
$$A=[a_{11},\ a_{12},\ a_{13}]\quad 和\quad B=\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{bmatrix},$$

我们规定
$$A\cdot B=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=\sum_j a_{1j}b_{j1}.$$

令
$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}.$$

要得到$A\cdot B$, 我们把A的每一行看作一个1×3矩阵，而把B的每一列看作一个3×1矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{bmatrix},\ B=[B_1B_2B_3].$$

于是

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}A_1\cdot B_1 & A_1\cdot B_2 & A_1\cdot B_3\\ A_2\cdot B_1 & A_2\cdot B_2 & A_2\cdot B_3\\ A_3\cdot B_1 & A_3\cdot B_2 & A_3\cdot B_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_j a_{1j}b_{j1} & \sum_j a_{1j}b_{j2} & \sum_j a_{1j}b_{j3}\\ \sum_j a_{2j}b_{j1} & \sum_j a_{2j}b_{j2} & \sum_j a_{2j}b_{j3}\\ \sum_j a_{3j}b_{j1} & \sum_j a_{3j}b_{j2} & \sum_j a_{3j}b_{j3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}\end{bmatrix}.$$

要得到$B\cdot A$, 只要交换上面A和B的位置即可.

例2 对于例1中的矩阵，有

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&1&4\\4&7&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-2&3\\1&1&1\\4&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot0+3\cdot1+1\cdot4&1\cdot(-2)+3\cdot1+1\cdot0&1\cdot3+3\cdot1+1\cdot2\\2\cdot0+1\cdot1+4\cdot4&2\cdot(-2)+1\cdot1+4\cdot0&2\cdot3+1\cdot1+4\cdot2\\4\cdot0+7\cdot1+6\cdot4&4\cdot(-2)+7\cdot1+6\cdot0&4\cdot3+7\cdot1+6\cdot2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&1&8\\17&-3&15\\31&-1&31\end{bmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}0&-2&3\\1&1&1\\4&0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3&1\\2&1&4\\4&7&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\cdot1+(-2)\cdot2+3\cdot4&0\cdot3+(-2)\cdot1+3\cdot7&0\cdot1+(-2)\cdot4+3\cdot6\\1\cdot1+\ 1\ \cdot2+1\cdot4&1\cdot3+\ 1\ \cdot1+1\cdot7&1\cdot1+\ 1\ \cdot4+1\cdot6\\4\cdot1+\ 0\ \cdot2+2\cdot4&4\cdot3+\ 0\ \cdot1+2\cdot7&4\cdot1+\ 0\ \cdot4+2\cdot6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8&19&10\\7&11&11\\12&26&16\end{bmatrix}.$$

例3 若

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&3\\1&2&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}6&-2&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix},$$

证明：$A\cdot B=B\cdot A$.

证明：

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&3\\1&2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6&-2&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-2-3&-2+2+0&-3+0+3\\6-3-3&-2+3+0&-3+0+3\\6-2-4&-2+2+0&-3+0+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}6&-2&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&3\\1&2&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-2-3&12-6-6&18-6-12\\-1+1+0&-2+3+0&-3+3+0\\-1+0+1&-2+0+2&-3+0+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是按 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 的顺序可相乘的矩阵,我们断定 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$,即矩阵的乘法满足结合律(不难对3级方阵验证这一点,只是过程稍嫌冗长).

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是可相加矩阵,若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$ 按 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 的顺序是可相乘的,则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$. 因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素

$$(a_{i1}+b_{i1})c_{1j}+(a_{i2}+b_{i2})c_{2j}+\cdots+(a_{in}+b_{in})c_{nj}$$
$$=(a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{in}c_{nj})+(b_{i1}c_{1j}+b_{i2}c_{2j}+\cdots+b_{in}c_{nj})$$

是 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素的和. 于是,矩阵的乘法和加法满足分配律.

4. 几类矩阵

在任一方阵中,我们说元素 a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\cdots$ 位于 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上,若主对角线下方所有元素都是0,则 $\boldsymbol{A}$ 称为上三角矩阵. 若主对角线上方所有元素都是0则 $\boldsymbol{A}$ 称为下三角矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角矩阵又是下三角矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 称为对角矩阵. 若对角矩阵的对角线元素都相等,则 $\boldsymbol{A}$ 称为数量矩阵. 若数量矩阵的对角线元素都是1,则 $\boldsymbol{A}$ 称为单位矩阵,以 $\boldsymbol{I}$ 表示. 例如:

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}\text{是上三角矩阵,}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&1&0\end{bmatrix}\text{是下三角矩阵,}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\text{是对角矩阵,}$$

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\text{是数量矩阵,}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{是3级单位矩阵}\boldsymbol{I}.$$

在矩阵乘法中,$\boldsymbol{I}$ 的地位类似于1在普通乘法中的地位,即 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}$. 在两个或多个矩阵的乘积中,可以随意把 $\boldsymbol{I}$ 插进去作为一个因子或者从因子中拿掉 $\boldsymbol{I}$.

5. 方阵的行列式

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式用 $|\boldsymbol{A}|$ 表示. 当 $\boldsymbol{A}=[a]$ 时,$|\boldsymbol{A}|=a$; 当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 时, $|\boldsymbol{A}|=ad-bc$. 当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级方阵($n\geqslant3$)时,$|\boldsymbol{A}|$ 的算法有几种. 我们以三级方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

为例，考查其中两种方法：

(i)
$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= -a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

上面每个展开式都是三项的和；每一项都是 A 的一个元素与一个 2 级方阵的行列式的带有正负号的乘积。在任一展开式中，各元素都取自 A 的同一行或同一列；2 级方阵（其行列式乘以元素 a_{pq}）是从 A 中把 a_{pq} 所在的行和列去掉后留下的矩阵 M_{pq}；与积 $a_{pq}\cdot|M_{pq}|$ 相连的符号是 $(-1)^{p+q}$. $|M_{pq}|$ 称为 a_{pq} 的子式；$(-1)^{pq}|M_{pq}|$ 称为 a_{pq} 的余子式，也用 A_{pq} 表示.

例 4

(a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= -20+0+10=-10.$$

这里，各元素都取自第一行.

(b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -20+21=1.$$

这里，由于有元素 0，所以各元素都取自第二行. 建议读者取第 3 列的元素写出其展开式.

(c)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

(ii) 在任意一本关于行列式的书中都会证明：行列式的运算具有下列性质：

O_{ij}: 对换第 i 行（列）和第 j 行（列），$|A|$ 变号.

$O_{p(i)}$: 以非零常数 p 乘第 i 行（列），相当于用 p 乘 $|A|$.

$O_{(i)+p(j)}$: 第 i 行(列)元素加上第 j 行(列)对应元素的 p 倍, $|\boldsymbol{A}|$ 的值不变.

例 4(c) 启发我们,这些运算首先可用来把 $\boldsymbol{A}$ 化简为三角矩阵.

例 5

(a) 作行运算 $O_{(2)-2(1)}$, $O_{(3)-4(1)}$, $O_{(3)-(2)}$: 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

(b) 作列运算 $O_{(2)-3(1)}$, $O_{(3)-(1)}$, $O_{(3)+\frac{2}{5}(2)}$: 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

(c) 作行运算$O_{(1)-(2)}$; $O_{(2)+3(1)}$; $O_{(3)+5(1)}$; $O_{(3)-\frac{9}{4}(2)}$: 有

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 9 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -3.$$

我们不加证明地指出:

若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{S}$ 是 n 级方阵,则

$$|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cdots\cdots|\boldsymbol{S}|.$$

6. 矩阵的初等变换

矩阵的*初等变换*就是上面列出的行列式的那些运算. 我们以后只用其中两种:

行运算 $O_{p(i)}$, 以后简记为 $p(i)$,

行运算 $O_{(i)+p(j)}$, 以后将记为 $(i)+p(j)$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一个或几个初等变换, 结果得到另一矩阵 $\boldsymbol{A}'$. $\boldsymbol{A}'$ 称为与 $\boldsymbol{A}$ 等价. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$两个矩阵等价记成 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}'$.

7. 线性方程组

考查含有三个未知数的非齐次方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-4, \\ 3x-y+2z=10, \\ -5x+3y+3z=1. \end{cases}$$

解这个方程组通常的方法是对这些方程进行重新组合, 以便用一个较简单的方程组代替给定的方程组. 对矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{AH}]$$

(其中 $\boldsymbol{A}$ 是系数方阵, $\boldsymbol{H}$ 是常数项构成的 3×1 矩阵)作行变换 $(i)+p(j)$, 把 $\boldsymbol{A}$ 化成

三角矩阵，也可得到同样的结果．我们看到

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 2 & 10\\ -5 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)-(2)}\begin{bmatrix}-1 & 4 & -3 & -14\\ 3 & -1 & 2 & 10\\ -5 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-5(1)]{(2)+3(1)}\begin{bmatrix}-1 & 4 & -3 & -14\\ 0 & 11 & -7 & -32\\ 0 & -17 & 18 & 71\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+\frac{17}{11}(2)}\begin{bmatrix}-1 & 4 & -3 & -14\\ 0 & 11 & -7 & -32\\ 0 & 0 & \frac{79}{11} & \frac{237}{11}\end{bmatrix}.$$

于是 $\frac{79}{11}z=\frac{237}{11}$, $z=3$．其次，$11y=7z-32=21-32=-11$, $y=-1$．最后，$x=4y-3z+14=-4-9+14=1$．所求的解是 $x=1$, $y=-1$, $z=3$.

8．奇异方阵和非奇异方阵

若 $|C|=0$，则方阵 C 称为奇异的；若 $|C|\neq 0$，则方阵 C 称为非奇异的．代数中的一个著名定理现在可以重述如下：

齐次线性方程组

$$\begin{cases}C_{11}x_1+C_{12}x_2+C_{13}x_3=0,\\ C_{21}x_1+C_{22}x_2+C_{23}x_3=0,\\ C_{31}x_1+C_{32}x_2+C_{33}x_3=0\end{cases}$$

有非零解的充要条件是系数矩阵 $C=[C_{ij}]$ 是奇异的．

假定 3 级方阵 $B=[b_{ij}]$ 是奇异的，于是存在不全为 0 的常数 p, q, r，使得

$$\begin{cases}b_{11}p+b_{12}q+b_{13}r=0,\\ b_{21}p+b_{22}q+b_{23}r=0,\\ b_{31}p+b_{32}q+b_{33}r=0\end{cases}$$

或
$$B\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

设 A 是任一 3 级方阵，则

$$A\cdot B\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

于是
$$[A\cdot B]\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

这样就证明了：

若 A, B 是 3 级方阵且 B 是奇异的，则 $A\cdot B$ 也是奇异方阵．

9．方阵的逆

若方阵 A, B 满足 $A\cdot B=B\cdot A=I$（见例 3），则 B 称为 A 的逆，记作 $B=A^{-1}$．同样

地，$\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 的逆，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$.

假定 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆，因为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$, $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{I}|=1\neq 0$, 从上节已证明的结果可知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 是非奇异的. 同理，从 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 推出 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的. 于是

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 有逆，则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的.

逆定理是

若 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在.

它的证明我们将不给出，有兴趣的读者可以参看任何一本关于矩阵的书籍.

求任一非奇异矩阵的逆，可按下述方法计算：

(i) 写出矩阵 $[\boldsymbol{AI}]$.

(ii) 用一列适当的初等行变换把 $[\boldsymbol{AI}]$ 化为 $[\boldsymbol{IB}]$. 显然，这种化简总是可行的. 除非按照这种方法，在某一步得到矩阵 $\boldsymbol{A}'\sim\boldsymbol{A}$ 的一行全部为 0，在这种情况 $|\boldsymbol{A}'|=0$. 但这是不可能的，因为，由于 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 而这些初等变换适合 $|\boldsymbol{A}'|=p|\boldsymbol{A}|$, $p\neq 0$.

例 6 求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&3\\1&2&4\end{bmatrix}$$

的逆.

解：写出矩阵 $[\boldsymbol{AI}]$，并着手把它化为 $[\boldsymbol{IB}]$. 我们有

$$[\boldsymbol{AI}]=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\1&3&3&0&1&0\\1&2&4&0&0&1\end{bmatrix}\underset{(3)-(1)}{\overset{(2)-(1)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)-2(2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3&3&-2&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)-3(3)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&6&-2&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{IB}].$$

所以，

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}6&-2&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

这已为例 3 所证实.

例 7 求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\3&-1&2\\-5&3&3\end{bmatrix}$$

的逆.

解:

$$
[AI]=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(1)-(2)}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-(1)}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[(3)+5(1)]{(2)-3(1)}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -17 & 18 & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{11}(2)}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & 0 \\ 0 & -17 & 18 & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[(3)+17(2)]{(1)+4(2)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{79}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{21}{11} & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\frac{11}{79}(3)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{79} & \frac{21}{79} & \frac{11}{79} \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[(2)+\frac{7}{11}(3)]{(1)-\frac{5}{11}(3)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{79} & \frac{12}{79} & -\frac{5}{79} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{79} & -\frac{1}{79} & \frac{7}{79} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{79} & \frac{21}{79} & \frac{11}{79} \end{bmatrix}=[IB].
$$

现在

$$
B\cdot A=\frac{1}{79}\begin{bmatrix} 9 & -12 & 5 \\ 19 & -1 & 7 \\ -4 & 21 & 11 \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I;
$$

因此
$$B=A^{-1}=\frac{1}{79}\begin{bmatrix}9 & 12 & -5\\ 19 & -1 & 7\\ -4 & 21 & 11\end{bmatrix}.$$

例 8 证明非奇异矩阵的逆是唯一的.

证明: 假设相反, 非奇异矩阵 A 有两个不同的逆 B_1、B_2, 则
$$A\cdot B_1=I\ (B_1=A^{-1}),$$
$$(B_2\cdot A)\cdot B_1=B_2\cdot I=B_2,$$
$$I\cdot B_1=B_2\ (B_2=A^{-1}),$$
故
$$B_1=B_2.$$
于是假设不真, 所以逆矩阵是唯一的.

从 $A^{-1}A=I$, 得到 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

例 9 在 7 中的线性方程组写成矩阵形式是
$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 10\\ 1\end{bmatrix}$$
上式左乘系数矩阵 A 的逆(见例 7), 得到
$$\frac{1}{79}\begin{bmatrix}9 & 12 & -5\\ 19 & -1 & 7\\ -4 & 21 & 11\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{79}\begin{bmatrix}9 & 12 & -5\\ 19 & -1 & 7\\ -4 & 21 & 11\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\ 10\\ 1\end{bmatrix}.$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$$
因而 $x=1$, $y=-1$, $z=3$ 是方程组的解.

10. 矩阵的转置

设 A 是一个矩阵, 所谓 A 的转置 A^T 是指把 A 的各行按同样顺序写成列所得到的矩阵. 例如, 若 $A=[a_{11}a_{12}a_{13}]$, 则
$$A^T=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ a_{13}\end{bmatrix};\quad 若\quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$
则
$$A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}.$$

关于矩阵的转置, 我们指出:

(i) 若 A 是方阵, 则 $|A^T|=|A|$.

(ii) 若 A, B 按 $A\cdot B$ 的顺序是可乘的, 则 $(A\cdot B)^T=B^TA^T$. 一般地, 两个或多个矩

阵的积的转置是它们的转置按相反顺序的积.

例如，$(ABC)^T=C^TB^TA^T$.

(ii)的证明稍微冗长，我们需要的是 $A=[a_{11}a_{12}a_{13}]$，$B=[b_{ij}]$ $(i, j=1, 2, 3)$，$C=\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}$这种特殊情况，至于验证则留给读者.

例 10　证明 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

证明：从 $A^{-1}\cdot A=I$ 得到

$$(A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T=I^T=I.$$

因而

$$(A^T)^{-1}A^T(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}\cdot I=(A^T)^{-1}$$

且

$$I\cdot(A^{-1})^T=(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}.$$

11．矩阵的秩

考虑矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

去掉 A 的任意一行和任意一列后留下的矩阵称为 A 的 2 级子矩阵，这种子矩阵的行列式称为 A 的 2 级子式. 同样，若去掉 A 的任意两行和任意两列，留下的矩阵称为 A 的一级子矩阵，这种子矩阵的行列式称为 A 的一级子式。A 有九个 2 级子式，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \cdots;$$

有九个一级子式，即 A 的九个元素.

若 $|A|\neq 0$ 我们可以说 A 的秩 r 是 3. 若 $|A|=0$ 但并非每个二级子式都为 0，则说 A 的秩是 $r=2$. 若 $|A|=0$ 且所有的 2 级子式为 0，但并非每个元素都为 0，我们就说 A 的秩 $r=1$. 例如，

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

的秩是 $r=2$，这是因为 $|A|=0$ 但

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

的秩是 1，这是因为 $|A|=0$ 且每个 2 级子式都为 0(请证实这一点)，但 $|4|=4\neq 0$.

矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的秩是 $r=0$.

可以证明初等变换不改变矩阵的秩.

12. 伴随方阵

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 3 级方阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 中 a_{ij} 的余子式．我们定义

$$\boldsymbol{A}\text{ 的伴随方阵}=\operatorname{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{31}\\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{32}\\ \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{33}\end{bmatrix}$$

(要特别留心，$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列)元素的余子式是 $\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$ 的第 i 列(行)元素)．

我们不加证明的指出：

若 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异方阵，则 $|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$.

例 11 由例 7,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 3\end{bmatrix}\quad\text{的逆是}\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{79}\begin{bmatrix}9 & 12 & -5\\ 19 & -1 & 7\\ -4 & 21 & 11\end{bmatrix}.$$

现在，$|\boldsymbol{A}|=-79$，因此

$$\operatorname{adj}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-9 & -12 & 5\\ -19 & 1 & -7\\ 4 & -21 & -11\end{bmatrix}.$$

请读者验算这个结果与 $\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$ 的定义一致．

13. 特征方程和特征根

与任一 3 级方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 相伴的方程

$$\phi(\rho)=\begin{vmatrix}a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho\end{vmatrix}=0$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的*特征方程*．若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ (与我们有关的只是这种情况)，$\phi(\rho)=0$ 是三次方程，因而有三个根 ρ_1, ρ_2, ρ_3 它们无一为 0，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的*特征根*．因为 a_{ij} 是实数，所以 $\phi(\rho)$ 的系数是实数且 $\phi(\rho)=0$ 或者有三个实根，或者有一个实根和两个虚根．

显然，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征方程相同，因此，它有相同的特征根．我们不加证明地指出：

若 ρ_i 是非奇异方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，则 $\dfrac{1}{\rho_i}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征根，因而也是 $(\boldsymbol{A}^{-1})^T$ 的特征根．

若 ρ_i 是非奇异方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，则 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\rho_i}$ 是 $\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$ 的特征根．

14. 对称矩阵

若 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为*对称矩阵*．

假设 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异对称矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，且由例 10，$(\boldsymbol{A}^{-1})^T=(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$．于是

非奇异对称矩阵的逆是对称矩阵，对称矩阵的伴随矩阵也是对称矩阵．

我们来证明：(实)对称矩阵 A 的特征根都是实数．

实际上，假定 $h+ik(i=\sqrt{-1},\ k\neq 0)$ 是 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 的一个特征根，则由代数定理，$h-ik$ 也是一个根．考虑

$$C=[A-(h+ik)I]\cdot[A-(h-ik)I]$$
$$=(A-hI)^2+k^2I.$$

因为 $|C|=0$,所以存在一个非零的 3×1 矩阵

$$X=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\text{使得 } CX=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.\text{ 因而}$$

$$X^TCX=X^T[A-hI]^2X+k^2X^TX$$
$$=[(A-hI)X]^T\cdot[(A-hI)X]+k^2X^TX$$
$$=0.$$

现在 $(A-hI)X$ 是实数, 所以 $[(A-hI)X]^T\cdot[(A-hI)X]\geqslant0$ 且 $X^TX>0$. 于是 $k=0$ 即 $|A-\lambda I|=0$ 只有实根.

15. 相似矩阵

设 A, B 是两个 n 级方阵,若存在一个 n 级非奇异方阵 R, 满足

$$B=R^{-1}AR,$$

则 A, B 称为相似矩阵.

设 A, B 是相似矩阵,则

$$B-\lambda I=R^{-1}AR-\lambda I=R^{-1}AR-R^{-1}\lambda IR$$
$$=R^{-1}(A-\lambda I)R,$$

且
$$|B-\lambda I|=|R^{-1}(A-\lambda I)R|$$
$$=|R^{-1}||A-\lambda I||R|$$
$$=|A-\lambda I|.$$

于是,两个相似矩阵有相同的特征方程和特征根.

上述定理的逆不真.